

LEÇON 106

I. Thèmes pour le plan et de développements

Les éléments marqués « DEV » sont des éléments qui peuvent être mis dans ce plan et réutilisés comme développements dans au moins une autre leçon. Attention, ce ne sont pas tous les meilleurs développements possibles pour cette leçon.

1. Choses classiques

Je conseille de jeter au moins un coup d'œil à ces éléments.

- groupes dérivés des sous-groupes de $GL_n(k)$ (pour les calculer, on utilise souvent des générateurs de ces groupes)
- propriétés de $O_n(\mathbb{R})$. matrices de rotation. réduction des endomorphismes normaux (DEV).
- plus de topologie et géométrie :
 - une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (H_2G_2)
 - compacité. Exemples :
 - sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (DEV)... par un théorème de point fixe de Kakutani
 - ... par le fameux ellipsoïde de John-Loewner (DEV)
 - connexité.
 - composantes connexes par arcs de sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$.
 - théorème de Lie-Kolchin (DEV : les sous-groupes résolubles connexes de $GL_n(\mathbb{C})$ sont cotriangularisables)
 - l'exponentielle de matrices, sa régularité, ses images. Beaucoup de développements. Sous-groupes arbitrairement petits de $GL_n(\mathbb{R})$. Sous-groupes à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{C})$ (DEV, FGN).
 - (plutôt important) la décomposition polaire est un homéomorphisme
 - la décomposition « OT » : orthogonal \times triangulaire.

2. Pistes pour enrichir

Ces éléments sont très bien pour s'amuser un peu plus, rajouter du contenu. Ce genre de contenu de plan se recase bien.

- étude de $O(p, q)$ (DEV).

- sous-variétés. Application : $\text{PSO}_n(\mathbb{R})$ est simple pour tout $n \neq 4$ (pour $n \geq 3$ impair, $\text{PSO}_n = \text{SO}_n$ est c'est un super développement). Pour $n = 4$, attention : $\text{PSO}_4(\mathbb{R}) \simeq \text{SO}_3(\mathbb{R})^2$ (Perrin), donc non simple. Pour retenir cette décomposition, regardez les dimensions en tant que sous-variétés. Corollaire : les rotations d'angle 2025 engendrent $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ (en définissant « rotation d'angle θ » comme une matrice ortho-semblable à $\text{diag}(I_{n-2}, R_\theta)$).
- Arithmétique :
 - Lemme de Kronecker+lemme de Serre (DEV) (borne sur les cardinaux des sous-groupes finis de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$)
 - Forme normale de Smith. Corollaire de l'algorithme de Smith : $\text{SL}_n(A)$ est engendré par les transvections dès que A est un anneau euclidien. Corollaire : groupes dérivés de $\text{GL}_n(A)$ et $\text{SL}_n(A)$. Autre corollaire : $\text{SL}_n(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \text{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
 - Une divisibilité exceptionnelle : $|\text{GL}_k(\mathbb{F}_q)| \times |\text{GL}_{n-k}(\mathbb{F}_q)|$ divise $|\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)|$.
 - Isomorphismes exceptionnels (Perrin et H_2G_2)
- Décomposition de matrices (LU/Choleski/Polaire). Faire les 3 à la suite = DEV (Serre, *Les Matrices*).
- groupes d'isométries de solides de Platon
- le groupe diédral ($D_n \subset \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$).

II. Développements pour cette leçon

- Ellipsoïde de John-Loewner et sous-groupes compacts de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ ou bien sous-groupes compacts de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ par un théorème de point fixe de Kakutani. Bons développements et traitent d'un sujet au cœur de la leçon, mais ne manipulent pas tant que ça de groupes linéaires.
- Théorème de Lie-Kolchin (c.f. exos pour connaître les questions que le jury vous posera forcément dessus). Ce développement est un banger, testé et approuvé pour vous.
- Lemme de Kronecker et application aux sous-groupes finis de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ (lemme de Serre). Je vous conseille fortement ce très beau développement d'arithmétique. Le lemme de Kronecker est un lemme d'arithmétique mais vous pouvez le prouver en torturant des matrices et en faisant de la topologie dans le groupe linéaire. Meilleure référence : la vidéo de Philippe Caldero *Kronecker : la méthode à Toto !*. J'ai mis au propre ce développement sur agreg-maths : *Lemme de Kronecker (la preuve à toto !)* et lemme de Serre.
- simplicité de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$ impair
- Enveloppe convexe du groupe orthogonal.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev. De la super arithmétique et des groupes linéaires à foison.
- bien d'autres sur agreg-maths...

III. Exercices

Définition 1. On note $D(G)$ le groupe dérivé de G (le groupe engendré par les commutateurs). On note $D^n(G) = D(D^{n-1}G)$. Un groupe G est dit résoluble si la suite $(D^n(G))_n$ atteint le groupe trivial.

Exercice 1. (Autour de Lie-Kolchin) Si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe et résoluble alors G est cotrigonalisable (théorème de Lie-Kolchin). Peut-on se passer d'une hypothèse ?

1. Retirons l'hypothèse connexe.
 - a. Montrer que tout groupe fini $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ trigonalisable est abélien.
 - b. Conclure : le théorème est-il encore vrai sans cette hypothèse ?
2. Montrer que tout sous-groupe du groupe des matrices triangulaires est résoluble.

Exercice 2. (Irréductibilité de la représentation standard)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum x_i = 0\}$. Quels sont les sous- \mathbb{C} -espaces vectoriels de H stables par l'action de \mathfrak{S}_n par permutation des coordonnées ?

Exercice 3. — Soit K un corps, E un K -espace de dimension 2. Soit \mathcal{T} l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathrm{SL}(E)$ des transvections de E . On fixe une base de E , et, pour $a \in K^*$, on note T_a la transvection de matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

1. Montrer que T_a et T_b sont conjuguées si et seulement si ab^{-1} est un élément de K^{*2} .
2. En déduire une bijection entre K^*/K^{*2} et \mathcal{T} .
3. Que dire de son cardinal si $K = \mathbb{C} ? \mathbb{R} ? \mathbb{Q} ? \mathbb{F}_p ?$

Exercice 4. (Isomorphismes exceptionnels) Soit K un corps et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E .

1. Montrer que $\mathrm{PGL}(E)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}(E)$.
2. On pose q une puissance d'un nombre premier. En déduire que, si $n \in \mathbb{N}$, et $N = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, alors il existe un plongement $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow \mathfrak{S}_N$.
3. Reconnaitre alors les groupes $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ pour $n = 2$ et $q \in \{2, 3, 4, 5\}$.
4. En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ a un quotient d'ordre 3. Peut-on alors affirmer que $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$? Même question pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (on pourra utiliser un exercice d'après).

Exercice 5. (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables dans un corps fini) Soit q une puissance d'un nombre premier. Trouver un polynôme dans $\mathbb{F}_q[X]$ tel que les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ qui sont diagonalisables sont précisément celles qui annulent ce polynôme.

Exercice 6. —

Soit $n \geq 2$.

1. Soit q une puissance d'un nombre premier p . Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est engendré par les transvections de paramètre 1.
2. Montrer que le résultat précédent est vrai si on remplace q par un élément quelconque de \mathbb{N}^* . En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un quotient de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. (Bizarreries de groupes topologiques) 1. Soit $H \subset G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ des sous-groupes. On suppose que l'intérieur de H dans G est non vide. Montrer que H est ouvert et fermé dans G .

2. Soit $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe. Montrer que la composante connexe de l'identité dans G est un sous-groupe de G .