Leçon 104 - Groupes finis

I. Thèmes pour le plan et de développements

Les éléments marqués « DEV » dans cette section sont des éléments qui peuvent être mis en item dans ce plan et réutilisés comme développements dans au moins une autre leçon. Attention, ce ne sont pas tous les meilleurs développements possibles pour cette leçon.

(1) Choses classiques

Je conseille de jeter au moins un coup d'œil à ces éléments.

- (obligatoire) Formule orbite/stabilisateur, théorème de Lagrange et cardinal de G/H. Formule des classes, centre d'un p-groupe.
- (très conseillé) Lemme de Gauss.
- (très conseillé) Plongement de Cailey de G dans $\mathfrak{S}_n$ puis dans $\mathrm{GL}_n(A)$ (A anneau commutatif).
- (très conseillé) Groupes cycliques, ordre d'un élément. Structure des groupes abéliens finis.
- Groupes de symétrie du cube, du tétraèdre.
- Pour chaque diviseur du cardinal d'un p-groupe, il existe un sous-groupe de ce cardinal.
- Groupes d'ordre pq.
- Classification des groupes d'ordre plus petit que 7. Vous pouvez monter plus haut si ça vous chante. C'est pas des cardinaux compliqués, mais ça calcule un peu plus.
- Groupe des quaternions. Groupes diédraux.

(2) Pistes pour enrichir

Ces éléments sont très bien pour s'amuser un peu plus, rajouter du contenu. Ce genre de contenu de plan se recase bien.

- Produit semi-direct, classification des groupes d'ordre $2q$, des groupes d'ordre 15.
- Transformée de Fourier discrète (très option C).
- Résolubilité. On peut dévisser un groupe résoluble pour que les quotients intermédiaires soient des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Lien avec Jordan-Hölder (attention la preuve de ce théorème est assez moche donc aimez ça). Un groupe nilpotent est résoluble, les p-groupes sont nilpotents.
- Théorie des représentations, lâchez-vous. Application spectaculaire : le théorème de Burnside de résolubilité (nécessite de kiffer la théorie des caractères et un peu d'entiers algébriques). Peut-être n'allez pas jusqu'à là, mais si les entiers algébriques et la théorie des caractères vous intéresse, regardez les étapes intermédiaires de la preuve de Burnside (que vous trouverez sur agreg-maths, et qui fait référence à H2G2). Tables de caractères (fait joli dans l'annexe).
- Galoiseries et comme application magnifique : l'exo 14.
- Groupes de symétrie de tous les 5 solides platoniciens ! Fous rires garantis (apprenez à faire une preuve à l'oral pour l'icosaèdre en agitant les mains, mais ne vous embêtez pas à faire des détails).

II. Développements pour cette leçon

Ils font aussi de supers items de plans. Liste non exhaustive.

- Théorème de Dixon (pas dur, recasage probas)
- Condition suffisante pour que ton petit cousin lise ta table de caractères
- Le théorème de Burnside de résolubilité (dev dur mais bien expliqué sur agreg-maths, ayez un H2G2 sous la main pour les "bases").
- Comptage des coloriages du cube (pas trop dur et extrêmement recasable ! ! ! !).
- phi_n irréductibles sur $\mathbb{Q}$ + dirichlet faible (bonus très facultatif : + réalisation des groupes abéliens comme groupes de Galois)
- Théorème de Gauss-Wantzel.
- Le seul groupe simple de cardinal 60 est $\mathfrak{A}_n$.
- $\mathfrak{A}_n$ simple (voir agreg-maths, très bon choix)
- Condition de cyclicité pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ (pas dur si les petits calculs ne vous font pas peur. Vous pouvez simplifier en ne traitant que le cas $n = p^\alpha$. Recasages utiles.)
- Frobenius-Zolotarev (c'est plus des techniques de matrices que de l'exploitation des groupes finis mais à voir).

III. Exercices

Des groupes finis partout :

Exercice 1. — Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 (p premier) est abélien.

Exercice 2. — Soit G groupe fini non commutatif. Montrer que $G/Z(G) \geqslant 4$.

Exercice 3. (Théorème de Dixon) Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que $\#\left\{(g,h) \in G^2 \,\middle|\, gh = hg\right\} \leqslant \frac{5}{8}\left|G\right|^2$. (utilisez probablement l'exo précédent)

Exercice 4. — Quels sont les groupes finis G tels que $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$?

Exercice 5. (Un contre-exemple à obligatoirement connaître pour Lie-Kolchin) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ cotriangularisable. Montrer que G est abélien. En déduire que $D_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas cotriangularisable.

Exercice 6. (Sous-groupe d'indice premier minimal, voir Caldero YouTube) Soit G fini. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice égal au plus petit diviseur premier du cardinal de G est dinstingué dans G.

Groupes abéliens finis :

Exercice 7. — Donner les invariants du groupe abélien fini $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

Exercice 8. — Caractères Si G est un groupe abélien fini, que vaut le groupe dual $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$?

Groupe symétrique :

Exercice 9. — Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ (Indication. $\mathfrak{S}_4$ est le groupe des isométries du tétraèdre, il permute les couples d'arêtes opposées. Bonus : pourriez-vous montrer la même chose en utilisant le fait que $\mathfrak{S}_4$ est le groupes des rotations du cube ?). Quel est son noyau ?

Exercice 10. (Générateurs de $\mathfrak{S}_n$) **1.** Par des transpositions :

a. Soit G un graphe à n sommets. Si G est connexe, montrer que G a au moins $n-1$ arêtes.

b. Quel est le cardinal minimal d'une famile de transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$?

2. Si $n \geqslant 5$ est impair, quel est le cardinal minimal d'une famille engendrant $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 11. (« $\mathfrak{A}_4$ n'est pas nilpotent ») **1.** Soit G un groupe et H un sous-groupe tel que $\#G/H = 2$ où $G/H := \{gH \mid g \in G\}$. Montrer que H contient tous les éléments carrés de G. **2.** En déduire que $\mathfrak{A}_4$ ne contient pas de sous-groupe d'ordre 6 (bien que $6 \mid \#\mathfrak{A}_4$).

Exercice 12. (Simplicité de $\mathfrak{A}_n$)

1. Combien $\mathfrak{A}_5$ contient-il de 3-cycles ? De bitranspositions ? De 5 cycles ?

2. Montrer que les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{A}_n$. Montrer qu'ils engendrent $\mathfrak{A}_n$.

3. Montrer que les bitranspositions sont conjuguées dans $\mathfrak{A}_n$.

4. Soit $H \lhd \mathfrak{A}_5$ strict et non trivial. Montrer que $H = \mathfrak{A}_5$. Pour cela, montrer que si H contient un 5-cycle, alors il les contient tous.

5. Application : montrer que les 7-cycles engendrent $\mathfrak{A}_{42}$.

Exercice 13. (Dérivé de $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$) Soit $n \geqslant 5$.

1. Montrer que $D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{A}_n$.

2. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

3. Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.

4. En utilisant σ et σ^2, montrer que $D(\mathfrak{S}_n) = D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$.

Galois & Co

Exercice 14. (Un polynôme résoluble pas trivial)

1. Soit k un corps, soit $P \in k[X]$ un polynôme réciproque de degré $2n$ (i.e. $P(X^{-1}) = X^{-2n}P(X)$). Soit $L = \mathrm{Dec}_k(P)$. Montrer que l'ordre de $\mathrm{Aut}(L/k)$ divise $n!2^n$.

2. Montrer que le polynôme $P = X^6 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (méthode faisable à la main : faites une réduction modulo 7 et utilisez Berlekamp. Ne faites pas les calculs devant le jury, dites juste ça...). (pour l'option C) Vérifiez-le avec SageMath.

3. Montrez que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{Dec}_{\mathbb{Q}}(P))$ est résoluble (utilisez soit Sylow (méthode instructive mais fatigante), soit Burnside (coût d'entrée de la preuve un peu élevé)). (*) Déduisez-en que P est résoluble par radicaux.

Exercice 15. (Un polynôme non résoluble) Montrer que le polynôme $X^5 - 4X + 2$ n'est pas résoluble par radicaux (montrez d'abord qu'il est bien irréductible en utilisant un critère connu) (voyez le groupe de Galois comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$. Remarquez que P a exactement deux racines réelles donc son groupe de Galois doit contenir une transposition. Utilisez un lemme connu de théorie des groupes pour montrer que le groupe admet un 5-cycle. Concluez.).