

I. Thèmes pour le plan et de développements

Les éléments marqués « DEV » dans cette section sont des éléments qui peuvent être mis en item dans ce plan et réutilisés comme développements dans au moins une autre leçon. Attention, ce ne sont pas tous les meilleurs développements possibles pour cette leçon.

(1) Choses classiques

Je conseille de jeter au moins un coup d'œil à ces éléments.

- (obligatoire) Formule orbite/stabilisateur, théorème de Lagrange et cardinal de G/H . Formule des classes, centre d'un p -groupe.
- (vivement conseillé) Lemme de Gauss.
- (vivement conseillé) Plongement de Cayley de G dans \mathfrak{S}_n puis dans $GL_n(A)$ (A anneau commutatif).
- (vivement conseillé) Groupes diédraux.
- (conseillé) Groupes de symétrie du cube, du tétraèdre.
- Pour chaque diviseur du cardinal d'un p -groupe, il existe un sous-groupe de ce cardinal.

(2) Pistes pour enrichir

Ces éléments sont très bien pour s'amuser un peu plus, rajouter du contenu. Ce genre de contenu de plan se recase bien.

- Produit semi-direct (c'est littéralement un groupe qui agit sur un autre), classification des groupes d'ordre $2q$, des groupes d'ordre 15, voire d'ordre pq .
- Graphe de Cayley d'un groupe, si les écrits vous ont plu...
- Théorie des représentations, lâchez-vous. Application spectaculaire : le théorème de Burnside de résolubilité (nécessite de kiffer la théorie des caractères et un peu d'entiers algébriques). Peut-être n'allez pas jusqu'à là, mais si les entiers algébriques et la théorie des caractères vous intéressent, regardez les étapes intermédiaires de la preuve de Burnside (que vous trouverez sur agreg-maths, et qui fait

référence à H2G2). Tables de caractères (fait joli dans l'annexe). La table de caractères de \mathfrak{S}_n est à valeurs entières (c'est l'histoire d'un groupe qui agit sur un corps).

- Groupes de symétrie de tous les 5 solides platoniciens ! Fous rires garantis (apprenez à faire une preuve à l'oral pour l'icosaèdre en agitant les mains, mais ne vous embêtez pas à faire des détails).

II. Développements pour cette leçon

Ils font aussi de supers items de plans. Liste non exhaustive.

- Classification des groupes d'ordre p^2
- Comptage des matrices diagonalisables sur un corps fini
- Groupes d'isométries du cube et du tétraèdre
- Les dévs suivants sont plus durs et originaux :
 - Condition suffisante pour que ton petit cousin lise ta table de caractères
 - Comptage des coloriage du cube (pas trop dur et extrêmement recasable!!!).
 - Théorème de Gauss-Wantzel ? (à bien tourner pour que ça illustre la leçon, mais c'est un groupe d'automorphismes de corps qui agit sur un corps, quand même).
 - Le seul groupe simple de cardinal 60 est \mathfrak{A}_5 (vous faites agir G sur ses sous-groupes de Sylow. Plusieurs versions sur agreg-maths, choisissez votre préférée. Il y en a une qui est jolie, elle commence par plonger G dans \mathfrak{S}_6 , puis réussir à en déduire un plongement vers \mathfrak{S}_5).
 - \mathfrak{A}_n simple (à bien tourner pour que le développement illustre bien la leçon).
 - Quaternions et isomorphismes exceptionnels, NH2G2, II, pages 10-12 (ou voir agreg-maths).
 - Isomorphismes exceptionnels entre certains groupes de matrices sur des corps finis et des groupes
 - L'algorithme de la forme normale de Smith pour un anneau euclidien.

III. Exercices

Exercice 1. (Sous-groupe d'indice premier minimal) Soit G fini. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice égal au plus petit diviseur premier du cardinal de G est distingué dans G .

Exercice 2. — Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ (Indication. \mathfrak{S}_4 est le groupe des isométries du tétraèdre, il permute les couples d'arêtes opposées. Bonus : pourriez-vous montrer la même chose en utilisant le fait que \mathfrak{S}_4 est le groupes des rotations du cube?). Quel est son noyau ?

Exercice 3. — Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 4. (Classes de conjugaison dans \mathfrak{A}_n) 1. Montrer que la classe de conjugaison dans \mathfrak{S}_n d'un élément σ , notée $C_{\mathfrak{S},\sigma}$, est de cardinal $\prod_{k=1}^n a_k(\sigma)!k^{a_k(\sigma)}$, où $a_k(\sigma)$ désigne le nombre de k -cycles dans σ .

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$. Prouver que sa classe de conjugaison dans \mathfrak{A}_n , notée $C_{\mathfrak{A},\sigma}$ n'est pas $C_{\mathfrak{A},\sigma}$ si et seulement si la suite $(a_1(\sigma), \dots, a_n(\sigma))$ est constituée uniquement de nombres impairs distincts. Dans l'autre cas, montrer que $\#C_{\mathfrak{S},\sigma} = 2\#C_{\mathfrak{A},\sigma}$.

Exercice 5. (La Grassmannienne : une question d'oral un peu saugrenue) Soit $0 \leq k \leq n$. On pose $\mathbb{G}_{n,k}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension k . Comment munir $\mathbb{G}_{n,k}$ qui le rend compact ?

Exercice 6. — Soit $n = n_1 + \dots + n_r$ une partition de l'entier n et soit P le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ constitué des matrices triangulaires par blocs dont les blocks sont exactement de tailles (n_1, \dots, n_r) . Décrire un invariant total de l'action de P sur $\mathrm{GL}_n(k)$ par la droite.

Exercice 7. — Donner un invariant total pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8. — \mathcal{H} le demi-plan de Poincaré, i.e. l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire > 0 . Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ est en bijection avec $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.