

# Les Leçons

## Table des matières

<b>1. Remarques générales</b>	<b>4</b>
<b>I. Analyse</b>	
1. 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications. . . . .	4
2. 203 - Utilisation de la notion de compacité. . . . .	4
3. 204 - Connexité. Exemples d'applications. . . . .	4
4. 205 - Espaces complets. Exemples et applications. . . . .	4
5. 206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse. . . . .	4
6. 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. . . . .	4
7. 209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications. . . . .	4
8. 228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications. . . . .	4
9. 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. . . . .	4
10. 230 - Séries de nombres réelles ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples. . . . .	4
11. 234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables. . . . .	4
12. 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables. . . . .	4
13. 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. . . . .	5
14. 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples. . . . .	5
15. 243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. . . . .	5
16. 244 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales. . . . .	5
17. 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications. . . . .	5
18. 250 - Transformée de Fourier. Applications . . . . .	5
19. Probas . . . . .	5
<b>II. Algèbre</b>	
1. 120 - Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	6
2. 121 - Nombres premiers. Applications. . . . .	6
3. 142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications. . . . .	6
4. 149 - Déterminant . . . . .	6
5. 152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie. . . . .	6
6. 155 - Exponentielle de matrices. Applications. . . . .	6
7. 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. . . . .	6
8. 191 - Techniques d'algèbre en géométrie . . . . .	6
<b>2. Items</b>	<b>7</b>
<b>III. Algèbre</b>	
1. Groupes . . . . .	7
2. Corps, anneaux, arithmétique . . . . .	7
3. Algèbre linéaire . . . . .	7
4. Géométrie . . . . .	8
<b>IV. Analyse</b>	
1. Intégration . . . . .	9
2. Exponentielle de matrices . . . . .	9

### 3. Plans

11

- 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
- 103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
- 104 - Groupes finis. Exemples et applications.
- 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
- 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 120 - Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.
- 121 - Nombres premiers. Applications
- 122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.
- 123 - Corps finis. Applications.
- 125 - Extensions de corps. Exemples et applications.
- 127 - Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.
- 141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
- 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 148 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 149 - Déterminant. Exemples et applications.
- 150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 151 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 155 - Exponentielle de matrices. Applications.
- 157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 203 - Utilisation de la notion de compacité.
- 206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.
- 213 - Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.
- 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en

géométrie.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.

218 - Formules de Taylor. Exemples et applications.

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 - Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

235 - Problèmes d'interversion de symboles en analyse

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

## Première partie

# Remarques générales

## I. Analyse

**A RECASER** Méthode du gradient conjugué.

### 1. 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

parler de séries de fourier

### 2. 203 - Utilisation de la notion de compacité.

### 3. 204 - Connexité. Exemples d'applications.

### 4. 205 - Espaces complets. Exemples et applications.

parler de transformée de fourier ? Oui, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes mais aussi utilisation de la convergence absolue ou normale afin d'avoir CVN implique CVU car ça fait converger des séries de fourier. Fourier, c'est du  $L^2$  donc ça passe comme illustration des espaces de Hilbert.

Théorème de la limite simple de Baire

### 5. 206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

extrema liés ?????!!!

### 6. 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

parler de séries de fourier, tcl ?

### 7. 209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

**A RECASER** il existe un plan d'une année passée avec un énoncé sur les groupes suivi de il existe  $f$  telle que l'ensemble des  $f^{(k)}$  est dense dans  $C^\infty$  voire même dans  $C^0$ .

tcl ?

Théorème de la limite simple de Baire

### 8. 228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Théorème de la limite simple de Baire

### 9. 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

### 10. 230 - Séries de nombres réelles ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

tcl ?

### 11. 234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

principe d'incertitude d'heisenberg ?

### 12. 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

parler de séries de fourier

### 13. 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

tcl

### 14. 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

parler de séries de fourier

tcl

Théorème de la limite simple de Baire

### 15. 243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

la fin du cours sur fourier contient un truc rigolo

Théorème d'inversion de Lagrange!

### 16. 244 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

### 17. 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

parler de séries de fourier lol

principe d'incertitude d'heisenberg?

en fait c'est pas dur de voir que les  $e_n$  c'est un vect dense dans  $L^2$  (quel autre espace? à part ça?) en regardant l'orthogonal. Mais on s'intéresse notamment au fait que la série converge...! On aime bien la CVU aussi...

### 18. 250 - Transformée de Fourier. Applications

tcl? **A RECASER** trouver les valeurs propres de la transformée de fourier

transformée de fourier discrète d'un GAF, et principe d'incertitude d'Heisenberg discret.

**A RECASER** principe d'incertitude d'heisenberg?

### 19. Probas

tcl

proba que deux éléments commutent, cas d'égalité.

nombre de dérangements, nombre de points fixes d'une permutation, probabilité ne ne pas avoir de cycle de longueur  $> n/2$ .

## II. Algèbre

**A RECASER** La preuve de la LRQ par les formes quadratiques est aussi une preuve de dénombrement et d'actions de groupes. Elle est à recaser un peu partout.

**A RECASER** REVOIR PK GROUPE D'ORDRE 42 N'EST PAS SIMPLE

**A RECASER** H2G2 tome 1 tableau des formes normales dans le chapitre actions

**A RECASER** théorème des suites de Sturm est bien démontré dans le FGN - algèbre 1, chapitre 5, exercice 5.50

**A RECASER** Le gourdon donne une application de la dualité aux endomorphismes cycliques.

**A RECASER** mon diagramme commutatif sur les restes chinois et le lemme des noyaux faut le mettre dans des annexes.

**A RECASER** dans dualité, mettre le caractère du dual.

**A RECASER** Progression arithmétique faible

**A RECASER** Tout GAF est un groupe de Galois sur  $\mathbb{Q}$ .

**A RECASER** Tout groupe symétrique est un groupe de Galois sur  $\mathbb{Q}$ . (admis) et pareil pour les résolubles

**A RECASER** <https://www.youtube.com/watch?v=YUGuAQP3M6Q> générateur de trucs funs sur la simplicité, les actions du groupe symétrique, et les polynômes symétriques!

**A RECASER** transformée de fourier discrète d'un GAF, et principe d'incertitude d'Heisenberg

**A RECASER** Formule de Héron

**A RECASER** progression arithmétique faible de dirichlet

**A RECASER** les isomorphismes exceptionnels entre des petits groupes linéaires et des groupes de permutations

**A RECASER** rang de la comatrice, multiplicativité, matrice qui sont des comatrices ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : toutes les inversibles, toutes celles de rang 1, et 0),  $\text{Com Com}(A) = A/\det(A)$  (si je ne me suis pas trompé, pour  $A$  inversible)

**A RECASER** Sous-groupes arbitrairement petits de  $GL_n$ .

### 1. 120 - Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Compter les unipotents de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### 2. 121 - Nombres premiers. Applications.

Compter les unipotents de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### 3. 142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

un anneau à pgcd est intégralement clos

Algo for computer : page 55 (pseudo-division euclidienne) et page 300 : interpolation rigidité du pgcd et application au théorème de l'élément primitif!!!

la DE de polynômes c'est dans un anneau quelconque.

**A RECASER** les endos cycliques sont un ouvert dense cpa

Dans l'anneau  $\mathbb{Z}$   $\sqrt{5}$ ,  $3a$  et  $3b$ , Ils n'ont pas de pgcd car s'il y en avait un, alors il serait 3 fois celui de  $a$  et  $b$ . Donc 3. Or,  $2+\sqrt{5}$  est un autre diviseur commun et ne divise pas 3!! Vérifier que dans le Rombaldi c'est fait comme ça...

$\mathcal{H}(\mathbb{C})$  est à pgcd mais non factoriel

Compter les unipotents de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### 4. 149 - Déterminant

gruppendedeterminant ?

### 5. 152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe un produit scalaire qui le rende autoadjoint.

### 6. 155 - Exponentielle de matrices. Applications.

Formule de Duhamel (solution d'une edl de degré 1)

### 7. 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

nombres de narayana (phil caldero) sa vidéo compte les chemins de dick avec  $k$  pics mais on peut aussi ne pas s'intéresser aux pics et dans ce cas on obtient les nombres de catalan.

nombre de dérangements, nombre de points fixes d'une permutation, probabilité ne ne pas avoir de cycle de longueur  $> n/2$ .

### 8. 191 - Techniques d'algèbre en géométrie

3 points coplanaires sont alignés si et seulement s'ils annulent un certain déterminant  $4 \times 4$  avec des 1 sur la première ligne.

## Deuxième partie

# Items

### III. Algèbre

#### 1. Groupes

**Proposition III.1.1. Noyau d'une représentation dans la table de caractères**

Soit  $(V, \rho)$  une représentation irréductible de  $G$  et  $\chi$  son caractère. Alors  $\text{Ker}(\rho) = \{g \mid \chi(g) = \chi(e)\}$ .

*Preuve.* Si  $\chi(g) = \chi(e)$ , alors on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (sommes de  $n$  gens de module 1). □

**Proposition III.1.2. Treillis des sous-groupes distingués**

Soit  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . En considérant la représentation régulière de  $G/H$ , montrer que  $H$  est le noyau d'une représentation de  $G$ .

En déduire que  $H$  est une intersection de noyaux de représentations irréductibles.

Donc le treillis se lit dans la table de caractères.

**Proposition III.1.3. Centre dans la table**

Les éléments du centre de  $G$  sont les éléments  $g \in G$  tels que pour tout caractère irréductible  $\chi$ ,  $|\chi(g)| = \chi(e)$ .

*Preuve.* D'une part,  $\{g \mid \exists \lambda, \rho(g) = \lambda \text{id}\} := Z(\rho_V) = \{g \in G, |\chi(g)| = \chi(e)\}$ . Si  $g \in Z(G)$ , alors  $g$  commute avec tout le monde donc définit un endomorphisme de  $V$  (irréductible) donc c'est une homothétie par Schur. Réciproquement, si  $g$  est dans l'intersection des  $Z(\rho_V)$ , alors tous les commutateurs avec  $g$  sont dans les noyaux des représentations irréductibles de  $G$  donc de leurs sommes donc de la représentation régulière qui est... de noyau trivial. □

#### 2. Corps, anneaux, arithmétique

**Théorème III.2.1.**

Le polynôme  $X^4 + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$  mais est réductible sur tout  $\mathbb{F}_p$ .

*Preuve.* On peut s'en sortir avec Berlekamp, ou sinon comprendre qu'on peut toujours fabriquer des racines 8-ièmes de l'unité dans  $\mathbb{F}_{p^2}$  par cyclicité et cardinalité. □

**Théorème III.2.2. Waring/Artin**

structure des polynômes symétriques

*Preuve.*

La preuve de l'unicité peut se faire en constatant que le degré d'un monôme  $\prod_i X_i^{\alpha_i}$  détermine le degré de  $\prod_i \Sigma_i^{\alpha_i}$ . Prendre alors le monôme dominant : c'est le seul.

Autre preuve : si  $Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = 0$ , et  $Q \neq 0$ , alors en se plongeant dans un corps infini, il existera  $x_1, \dots, x_n$  tq  $Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ . Scinder alors le polynôme  $X^n + \sum_{i=1}^n x_i T^i$  dans une extension de corps, et alors les racines sont des polynômes symétriques élémentaires en les  $x_i$ , donc  $Q \circ \Sigma$  évalué en les racines est nul. Or, ça fait  $Q(x_1, \dots, x_n)$ , contradiction. □

#### 3. Algèbre linéaire

**Théorème III.3.1. Réduction simultanée**

Soit  $M, N$  deux matrices hermitiennes. On suppose que  $M$  est définie positive. Alors :

- (i)  $M^{-1}N$  est diagonalisable. Si  $N$  est (resp. strictement) positive/négative, alors le spectre de  $M^{-1}N$  aussi.
- (ii) (**Coréduction**) Il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  ( $GL_n(\mathbb{R})$  dès que  $M$  et  $N$  sont réelles) tel que  $P^T M P = I_n$  et  $P^T N P = D$  où  $D$  est diagonale.

**Remarque :** Le premier point a du sens en algèbre linéaire et peut servir à prouver que le déterminant est log-convexe sur  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Le deuxième point s'interprète bien comme coréduction de formes quadratiques.

*Preuve.* On pose  $\langle x, y \rangle_M = \langle x, My \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors par symétrie définie positivité de  $M$ , cette forme bilinéaire est symétrique défini positif, donc c'est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .  $\langle x, (M^{-1}N)y \rangle_M = \langle x, MM^{-1}Ny \rangle = \langle Nx, y \rangle = \langle MM^{-1}Nx, y \rangle = \langle y, MM^{-1}Nx \rangle = \langle y, M^{-1}Nx \rangle_M = \langle M^{-1}Nx, y \rangle_M$ . Donc  $M^{-1}N$  est symétrique pour ce produit scalaire, donc diagonalisable en une base orthonormée pour lui, notée  $e_1, \dots, e_n$ . On pose  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers  $e$ , donc ses colonnes sont les vecteurs  $e_i$ . On vient de voir que  $\langle x, M^{-1}Ny \rangle_M = \langle Nx, y \rangle$ . Donc dire que  $N$  est (resp. définie) positive/négative se traduit directement dans  $\langle Nx, y \rangle$  qui a ce même signe. Donc  $\langle x, M^{-1}Ny \rangle_M$  a ce même signe, donc  $M^{-1}N$  a ce même signe en tant que matrice symétrique pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ , ce qui permet de conclure pour son spectre.

On a alors d'une part  $\lambda_i$  tels que  $M^{-1}Ne_i = \lambda_i e_i$ , et d'autre part,  $\langle e_j, Me_i \rangle = \delta_{i,j}$  donc on a d'une part  $M^{-1}NP = P \text{diag}(\lambda_i)$  et d'autre part  $P^T M P = I_n$ . On a donc  $P^{-1}M^{-1}(P^{-1})^T P^T N P = \text{diag}(\lambda_i)$  donc  $D := \text{diag}(\lambda_i) = P^T N P$   $\square$

**4. Géométrie**

**Théorème III.4.1.**

Ce diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{SO}_2(\mathbb{R}) \\
 \downarrow & \nearrow \theta \mapsto R_\theta, \simeq & \downarrow \\
 \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{exp}, \simeq} & \mathbb{U}
 \end{array}$$

*Preuve.* L'application de  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  vers  $\mathbb{U}$  se définit comme étant la rotation de l'élément  $(1, 0) = 1 + 0i \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . C'est bien un morphisme de groupes.  $\square$

**Remarque :** Cela traduit le fait que tourner un élément en le multipliant par  $e^{i\theta}$ , c'est pareil que de lui faire subir une rotation.

**Corollaire III.4.3. Produit scalaire et angles**

Si  $u, v$  unitaires séparés d'un angle  $\theta$  (i.e., il existe une rotation d'angle  $\theta$  envoyant l'un sur l'autre), alors  $\langle u, v \rangle = \cos(\theta)$ .

*Preuve.* On peut remplacer  $\langle u, v \rangle$  par  $\langle p_v(u), v \rangle$ . Faire un dessin : la coordonnée de l'un sur l'autre c'est  $\cos(\theta)$  par le théorème précédent.  $\square$

**Théorème III.4.4.**

Une symétrie d'eux permute les golden ratio rectangles. Il y a 30 arêtes donc 15 golden ratio rectangle donc 5 triplets de golden ratio rectangles "orthogonaux". Ces triplets sont permutés par les symétries, donc  $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_5$ . Par relation orbite-stabilisateur sur une face, on voit que le groupe des symétries a 60 éléments. C'est donc  $\mathfrak{A}_5$ . Autre preuve : exhiber les 60 éléments, montrer géométriquement que le groupe est simple et conclure que c'est  $\mathfrak{A}_5 \dots$

De plus,  $-I_3$  commute avec tout le monde donc le groupe des isométries de l'icosaèdre est  $\mathfrak{S}_5$ .

**IV. Analyse**

**Théorème IV.0.1. Division : REF MANQUANTE**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  dont toutes les dérivées sont nulles en 0. Alors  $f/x^n$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  WTF dans mon plan 209 j'ai mis une indicatrice ??

**Théorème IV.0.2. Inégalité du sinus**

Pour  $x \geq 0$ ,  $x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$ . Permet de prouver que la limite de  $\sin(x) - x + x^3/6$  divisé par  $x^5$  ça fait 1/120.

**Théorème IV.0.3. « lemme des monômes »**

si  $\int_a^b f(t)t^n = 0$  alors  $f = 0$ .

**Théorème IV.0.4. Rademacher**

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne, alors il existe  $g \in L^\infty$  tq  $f(x) = f(a) + \int_a^x g$ .

**Théorème IV.0.5. Banach- $G_\delta$ -Fourier**

existence d'un  $G_\delta$  sur lequel toutes les séries de fourier divergent sur un  $G_\delta$

**Théorème IV.0.6. Sarkowski**

Si  $f : I \rightarrow I$  est continue, avec  $I$  intervalle, et admet un point 3-périodique, alors elle admet des points  $n$ -périodiques pour tout  $n > 1$ .

**Théorème IV.0.7. Tietze**

voir Jean Saint-Raymond p87

**1. Intégration**

**Théorème IV.1.1.**

Soit  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors  $F : u \mapsto \int_{-\infty}^u g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Preuve. Continuité sous le signe intégrale. □

**Théorème IV.1.2.**

Intégrale de Dirichlet par TF

Preuve.  $\int_\varepsilon^k \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt = \left[ \frac{-\sin(t)^2}{t} \right]_\varepsilon^k + \int_\varepsilon^k \frac{\sin(2t)}{t} dt$ . Conclure par Fourier-Plancherel.  $u = 2t, du/u = dt/t$ , donc ça vaut  $\int_0^\infty \sin(u)/u du$ . Soit  $P = \mathbb{1}_{[-1,1]}$  la fonction porte. On fait tendre  $\varepsilon$  et  $k$  vers 0 et  $\infty$ . L'intégrale de Dirichlet est donc égale :  $1/2 \|\text{sinc}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \text{sinc}^2$ .  $\hat{P}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-i\xi t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{-i\xi}(e^{-i\xi} - e^{i\xi}) = 2 \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ . Donc comme  $2\pi \|P\|_2^2 = \|\hat{P}\|_2^2 = \|2\text{sinc}\|_2^2 = 4\|\text{sinc}\|_2^2$ . Donc  $\|\text{sinc}\|_2^2 = \pi$ . □

**2. Exponentielle de matrices**

**Théorème IV.2.1. Inégalité corde-arc**

Si  $H, K$  sont hermitiennes et  $\|\cdot\|$  une norme d'opérateur, alors  $\|e^{iH} - e^{iK}\| \leq \|H - K\|$ .

*Preuve.* remarquer que  $H^m - K^m = \sum_{p=1}^n H^{m-p}(H-K)K^{p-1}$  ce qui permet de l'appliquer 2 fois : quand on majore les termes de la différence d'exponentielles (série entière), et quand on conclut :  $\|e^{iH} - e^{iK}\| = \left\| (e^{iH/m})^m - (e^{iK/m})^m \right\| \leq m \|e^{iH/m} - e^{iK/m}\|$ . On peut alors faire tendre  $m$  vers l'infini.  $\square$

## Troisième partie

# Plans

## 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

ajouts : . Nombre de points fixes d'une action (et fixes d'une représentation : ultra important pour la théorie des caractères, application possible à l'espérance/variance des points fixes), trace des matrices de permutations. Polynômes symétriques why not (par galois lol)

### 1. Notion d'action de groupe

#### 1.1 Le groupe symétrique

$k$ -transitivité, classe de conjugaisons dans  $\mathfrak{A}_n$ .

#### 1.2 Groupes d'isométries

##### (i) Le groupe diédral

##### (ii) Les solides de Platon

#### 1.3 Orbites d'actions du groupe linéaire

Smith, Invariants de Similitude. Lien entre les deux :  $A - XI_n$ .

#### 1.4 Descriptions d'une action de groupes

#### 1.5 Actions naturelles dans un groupe et applications

translation, translation sur les classes à gauche, conjugaison donc centre d'un  $p$ -groupe. Penser au lemme de Cauchy à mettre à la fin.

#### 1.6 Sylow

groupes de cardinal 30.

### 2. Description d'actions classiques

[revoir mon plan](#)

### 3. Représentations de groupes

#### 3.1 Etude par l'algèbre linéaire

Définition. Morphismes. Sous-représentations. New from old (ne pas oublier  $\text{Hom}_{\mathbf{Vec}}(V, V')$  qui est une représentation dont les fixes est  $\text{Hom}_G(V, V')$ ). Diagonalisabilité. Lemme de Schur. Lemme de Maschke. Projecteur vers les fixes. Exemples : représentation régulière, représentation standard du groupe symétrique.

#### 3.2 Théorie des caractères

définition, c'est un morphisme si  $\dim(V) = 1$ , calcul de caractères, espace des fonctions centrales et son produit scalaire, les caractères en sont. Si  $V = \bigoplus_i V_i^{n_i}$ , alors  $\langle V, V_i \rangle = n_i$ . Les caractères irréductibles sont une bon des fonctions centrales. Orthogonalités de la table des caractères.  $\frac{\chi(C)|C|}{\chi(e)}$  est entier algébrique. Le rang d'une représentation irréductible divise  $|G|$ .

### 4. Nul n'est censé ignorer Galois

#### 4.1 La correspondance de Galois

caractéristique nulle. Le groupe de Galois permute transitivement les racines. définition et les deux volets.

#### 4.2 L'extension cyclotomique

Calcul de son groupe. Résolubilité de  $P(X) = 0$  par radicaux équivaut à  $\text{Gal}(\text{Dec}_{\mathbb{K}}(P)/\mathbb{K})$  résoluble. Problème inverse de Galois abélien.

#### 4.3 Retour aux représentations

Petit cousin, théorème de Burnside (lemme et théorème)

## Annexe

Octaèdre dans le cube, tables sympa dans le berhuy ( $D_4$ ,  $\mathcal{H}_8$ ,  $\mathfrak{A}_4$  (celui-ci est important),  $\mathfrak{S}_3$ ). Faire un pentagone, représenter  $r$  et  $s$  de  $D_5$ .

# 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

## 1. Description topologique et analytique

### 1.1 Paramétrisations

définition, compacité, connexité par arcs. définition de l'exponentielle, c'est un morphisme de groupes surjectif de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$ . exemples d'éléments  $(i, j)$ ,  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . Projection stéréographique du cercle et résolution de l'équation diophantienne de pythagore? Sous-groupes de  $\mathbb{U}$  (finis ou denses dans  $\mathbb{U}$ ). Sous-groupes compacts de  $\mathbb{C}^*$ .

### 1.2 Notion d'argument

Logarithme complexe (tauveil je pense)

### 1.3 Fonctions trigonométriques et géométrie plane

sin, cos. Noyau de Dirichlet. Matrices de rotation.  $SO_2(\mathbb{R})$ , une notion d'angle. Groupe diédral.  $SO_3(\mathbb{R})$ ?

## 2. Racines $n$ -ièmes de l'unité

### 2.1 Description

Racines de l'unité, groupes, cyclicité, générateurs, indicatrice d'Euler. Racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe. Des matrices diagonalisables : suite de polygones.

### 2.2 Cyclotomie

polynômes cyclotomiques, dans  $\mathbb{Z}$ , formule de  $X^n - 1$ . Degré de l'extension cyclotomique. Lemme de Kronecker, sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . coefficients de  $\varphi_{pq}$ , monsieur 105, existence de polynôme cyclotomiques ayant des coefficients arbitraires.

### 2.3 Transformée de Fourier discrète

## 3. Représentations de groupes

la théorie classique en allant un peu vite. Insister sur les racines de l'unité : diagonalisabilité, domaine de valeurs des caractères, GAF. Petit cousin!

## 4. Racines de l'unité et extensions de corps

### 4.1 Autour de l'extension cyclotomique

Son groupe de galois. Tout groupe abélien en est un quotient : boum le problème inverse. Intersection d'extensions cyclotomiques (perrin)

### 4.2 Résolubilité par radicaux

extensions de Kummer. Et la condition nécessaire et suffisante.

### 4.3 Retour aux représentations

Lemme final puis Burnside.

## Annexe

cercle trigo, rotations, un pentagone pour le groupe  $D_5$ . Des diagrammes d'extensions?

# 103 - Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

**Motivations** : le principe de conjugaison : deux éléments conjugués ont (au conjugeur près) la même forme, les mêmes points fixes. Exemple dans l'espace, en réduction des endos, dans le groupe symétrique.

Ajout mignon : proba de commuter.

## 1. Conjugaison, sous-groupes normaux et groupes quotients

### 1.1 L'action par conjugaison

automorphismes intérieurs, commutateurs, classes de conj. Nombre de classes de conj par burnsides (est-ce intéressant ? **WTF**), formule des classes (important),  $p$ -groupes. Le centre (exemples)

### 1.2 Sous-groupes normaux

stabilité par Commutateurs, et commutateurs. les groupes dérivés, le centre, les noyaux.

Groupes distingués : les sous-groupes distingués sont les noyaux de morphismes. Sous-groupes du quotient.

Abélianisé, factorisation des morphismes vers un abélien. Application : calcul intelligent de  $D(\mathfrak{A}_4)$  : montrer que  $V_4$  est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{A}_4$ , le quotient est de cardinal 3 donc abélien. Donc  $V_4$  contient  $D(\mathfrak{A}_4)$ , qui est de cardinal multiple de 4 et divisant 12... donc 4. Et aussi : Carrés dans  $\mathfrak{A}_4$  et sous-groupe d'indice 2.par

Sous-groupes d'indice 2, sous-groupe d'indice premier minimal ? **REVOIR**  $G/Z(G)$  cyclique implique abélien.  $G/Z(G) = \text{Int}(G)$ . Les théorèmes d'isomorphisme (dont le deuxième qui se formule avec la notion de normalisateur)

### 1.3 Construction et utilisation de sous-groupes normaux

Sylow, produit semi-direct (produit semi-direct interne : si  $N \triangleleft G$ ,  $N \cap H = 1$ , si  $G = HN$ , alors  $G = N \rtimes K$  se fait par le deuxième thm d'iso, puis on scinde en replongeant  $H$  dans  $G$ ! Une condition suffisante pour avoir ça (cas d'indice fini) est  $N \cap H = 1$  et  $|H| = [G : N]$ .) Notion de groupe simple. Classification ? Groupes simples de cardinal  $< 60$ . Groupe diédral, groupes d'ordre  $pq$ .

## 2. Exemples dans des groupes classiques

### 2.1 Le groupe symétrique

Calcul de la permutation conjuguée. Partitions de l'entier  $n$ . Classes de conjugaison (et après dans  $\mathfrak{A}_n$ ),  $\mathfrak{A}_n$  est simple. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$  **REVOIR** ?

### 2.2 Groupes de matrices

#### (i) Groupes dérivés

$D(\text{SL}_n)$ ,  $D(\text{GL}_n)$  (vrai pour les corps, ou pour  $n \geq 3$  avec un anneau euclidien). Cas de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  : il a un groupe dérivé non trivial car il possède  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  comme quotient.

#### (ii) Invariants de similitude

Matrices compagnon. Invariants de similitude.

#### (iii) Dans le groupe orthogonal

Centre de  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{SO}_n(\mathbb{R})/Z(\text{SO}_n(\mathbb{R}))$  est simple, application à des familles génératrices autoconjuguées.

## 3. Représentations et résolubilité

**IMPORTANT** : c'est une illustration ultra importante des classes de conjugaison de  $G$ !

### 3.1 Etude par l'algèbre linéaire

Les sous-groupes distingués sont les intersections de noyaux.

### 3.2 Théorie des caractères et application

Passage à l'abélianisé pour le calcul de tables. Treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères. Lecture du centre dans la table de caractères.

### 3.3 Résolubilité

Lie-Kolchin !!! Burnside.

### 3.4 Application : résolution d'équations polynomiales

les 2 volets et résolubilité d'équations. Problème inverse pour les GAF : tous les GAF sont des quotients des  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ .

## Annexe

lemme des manèges dans  $\mathfrak{S}_n$ .

# 104 - Groupes finis. Exemples et applications.

Ajouts honnêtes : groupes d'ordre  $p^2$  sont abéliens,  $\mathfrak{A}_4$  n'a pas de sous-groupe d'indice 2. Scindages de classes de conjugaison dans le groupe alterné.  $\mathfrak{A}_n$  est simple, groupes simples A RAJOUTER !!

## 1. Propriétés générales des groupes finis

ordre d'un groupe, indice.

### 1.1 Actions de groupes

orbite stabilisateur, Lagrange (application au théorème d'euler), le cardinal d'un quotient divise  $|G|$  écrire  $|G| = |H| [G : H]$ , centre d'un  $p$ -groupe, lemme de Gauss. formule de Burnside. Plongement de Cailey.

### 1.2 Groupes abéliens finis

ordre d'un élément, il divise  $|G|$ . Groupes cycliques, chinois, structure des GAF. cyclicité de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ . TF discrète?

### 1.3 Théorèmes de Sylow

Bah oui. Direct. Groupes d'ordre  $pq$  sont pas simples. 30 n'est pas simple.

### 1.4 Produit semi-direct et classification

condition suffisante pour avoir un produit semi-direct interne. groupes d'ordre  $2q$ , groupes d'ordre 15

## 2. Représentations finies sur $\mathbb{C}$

### 2.1 Semi-simplicité

tu croyais quoi. représentation standard est irréductible (ça se fait sans les caractères hein ?)

### 2.2 Théorie des caractères

bah ouais et mon pote si t'oublies de mq  $|C| \chi(C) / \chi(e)$  est un entier algébrique je te frappe

### 2.3 Résolubilité

produit semi-direct. définitions.  $p$ -groupes résolubles et donc on a tous les  $p$ -sous-groupes. Théorème du Côté Brûlé<sup>1</sup>. Application du plongement de Cailey : trouver un sous-groupe d'indice 2 dans les groupes d'ordre pair pas multiple de 4. représentations de GAF

## 3. Applications

### 3.1 Géométrie

étude du groupe diédral. isométrie du cube=octaèdre, du tétraèdre, colorations du cube, icosaèdre=dodécaèdre de groupe  $\mathfrak{A}_5$  III.4.4. morphisme  $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ .

### 3.2 Théorie de Galois

L'extension cyclotomique et son groupe de Galois. Condition pour que ton petit cousin lise la table de caractères. Une extension est galoisienne si et seulement si son groupe est d'ordre son degré (c'est vrai ça?). Il permute transitivement les racines. Correspondance de Galois. Une extension galoisienne finie de caractéristique nulle est résoluble.  $X^5 - 4X + 2$  n'est pas résoluble, l'équation générale non plus. Les équations de degré inférieur à 60 strictement sont toutes résolubles!

## Annexe

Table de  $\mathfrak{A}_4$  et  $\mathbb{H}_8$ , on est des fous. Le cube et l'octaèdre sont des solides duaux. Plans magiques dans le tétraèdre pour avoir un morphisme  $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ . Réflexion par rapport au bon plan pour avoir une transposition dans les symétries du tétraèdre!

---

1. tu l'as chacal ?

## 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

ajout : nombre de dérangements, nombre de points fixes d'une permutation, probabilité ne pas avoir de cycle de longueur  $> n/2$ .

### 1. Décomposition en cycles d'une permutation

#### 1.1 Généralités

définition du groupe des permutations d'un ensemble fini, dire que sa classe d'isomorphisme ne dépend que de son cardinal, et on pose  $\mathfrak{S}_n$ . Fixateur, support, orbite. L'action de  $\mathfrak{S}_n$  est fidèle et  $n$ -transitive. Permutations à support disjoints. Support de  $\sigma^k$  inclus dans celui de  $\sigma$ . cardinal de  $\mathfrak{S}_n$ . Centre.

#### 1.2 Décomposition en cycles et classes de conjugaison

définition d'un cycle. décomposition en cycles à supports disjoints. Ordre d'un élément. Partitions de  $n$ . Cardinal du commutateur d'une permutation. Commutant avec un  $k$ -cycle (ce sont les puissances de ce cycle). Cardinal des classes de conjugaison.

#### 1.3 Générateurs

Les cycles, les transpositions, nombre minimal de transpositions (graphe!). Si on a un  $p$ -cycle et une transposition. nombre minimal de transpositions pour générer (c'est des graphes).

### 2. Structure du groupe $\mathfrak{S}_n$

#### 2.1 La signature

Définition explicite, c'est l'unique morphisme. Expression

#### 2.2 Le groupe alterné

engendré par les 3-cycles, les double transpositions, et autres : les  $(1\ 2\ i)$ , les  $(i\ i+1\ i+2)$ . simple! seul groupe d'indice 2. Carrés dans  $\mathfrak{A}_4$  et sous-groupe d'indice 2. Groupes dérivés, et aussi  $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$ . Plongement de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\mathfrak{A}_{n+2}$  (mais pas  $\mathfrak{A}_{n+1}$  WTF).

#### 2.3 Actions du groupe symétrique. Représentations

permutations circulaires et lemme de Cauchy.  $\text{Tr}((A+B)^p) = \text{Tr}(A^p + B^p)$  modulo  $p!$  Matrices de permutation, leur déterminant. Représentation standard. REVOIR. Le cardinal d'une orbite d'une action de  $\mathfrak{S}_n$  ( $n \geq 5$ ) vaut soit 1, soit 2, soit plus que  $n$ . Faire un des tables de caractères.

### 3. Méthodes combinatoire avec le groupe symétrique

#### 3.1 Utilisation de la combinatoire

Cailey, application à l'existence d'un sous-groupe d'indice 2. on peut faire Sylow (en conséquence... REVOIR), action sur les sylow.

classes de conj dans  $\mathfrak{A}_n$  (condition de scindage en terme de "existe-t-il qqun de signe  $-1$  dans le commutateur?")

$\text{Int}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n$  pour  $n \geq 3$ . Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$  (il suffit de montrer que l'image d'une transposition est une transposition. Quand ce n'est pas le cas, on compare les centralisateurs et...  $n = 6$ ) (voir Perrin).

seul sous-groupe simple de cardinal 60 (pour apprendre ça, aller voir le plan de la 103 de guigui, on agit sur les 5-sylow puis on continue)

#### 3.2 Probabilités et groupe symétrique

restaurants chinois. Variance du nombre de fixes.

### 4. Applications

#### 4.1 Déterminants

formes  $n$ -linéaires alternées. Cauchy-Binet ainsi prouvé. Frobenius-zolotarev.

#### 4.2 Polynômes symétriques

Polynômes symétriques, Waring. Fonctions symétriques des racines. Construction d'annulateurs de sommes et produits. Théorème des invariants de Hilbert ?

#### 4.3 Théorie de Galois

Le groupe de Galois permute les racines et se plonge dans  $\mathfrak{S}_n$ . Condition pour qu'il soit dans  $\mathfrak{A}_n$ . Groupe de Galois de l'extension, une autre preuve des polynômes symétriques. Des polynômes pas résolubles.

#### 4.4 Groupes d'isométries des solides de Platon

Ce sont tous des groupes symétriques !

## Annexe

solides de platon. Des tables de caractères ! Le graphe connexe dans le meilleur cas (le coup des  $n - 1$  transpositions là). Lemme des manèges. Restaurants chinois.

## 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.

**Motivation** Le groupe linéaire est un groupe défini par son action sur un ev  $E$ . Il permet d'étudier  $E$  et ses morphismes. Réciproquement, à partir d'informations sur l'action de ce groupe et sur  $E$ , on déduira des propriétés de  $GL(E)$ .

Note : Les groupes linéaires sur un anneau euclidien sont des sous-groupes des groupes linéaires dans le corps des fractions.

### 1. Le groupe linéaire d'un espace vectoriel et actions

#### 1.1 Premières propriétés

Déterminant et groupe spécial linéaire. Le morphisme du déterminant,  $SL$ . Centre.

#### 1.2 Actions

stabilisateurs de drapeaux maximaux : ce sont les matrices cotz. Stabilisateurs d'une décomposition en somme directe. Action sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  : par équivalence (invariants de l'action à gauche et à droite : le noyau, l'image), par conjugaison. Invariants de similitude. Action par congruence, formes quadratiques, Pfaffien, matrices symplectiques.

### 2. Sous-groupes du groupe linéaire et familles génératrices

#### 2.1 Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$

opérations élémentaires, pivot de Gauss, famille de générateurs du groupe linéaire, de  $SL_n$ , liens avec le pivot de Gauss, C'est une application de Smith en soi. Groupe dérivé : tout marche sauf pour  $SL_2(\mathbb{F}_3)$ . Les transvections sont conjuguées (Pour  $n \geq 3$ ), donc  $PSL$  est simple (Perrin, attention c'est un peu relou)

#### 2.2 Cas des corps finis

dénombrément, Zolotarev, Kronecker et sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Application : le dérivé de  $SL_2(\mathbb{Z})$  n'est pas trivial (car il surjette  $SL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ). matrices de permutations, plongement de Cailey, Sylow **REVOIR**

### 3. Topologie du groupe linéaire et groupe orthogonal

#### 3.1 Groupe orthogonal

stabilisateur sur cette forme quadratique, enveloppe convexe du groupe orthogonal. Isométries, Groupes d'isométries de Platon? Centres. Réduction des endos orthog.

#### 3.2 Topologie de $GL(E)$

Exponentielle de matrices, matrice hermitiennes avec comme application la décomposition polaire et la topologie sur  $GL$ . Sous-groupes arbitrairement petits de  $GL_n$ . Sous-groupes à 1 paramètre, racine locale de matrices. Lie-Kolchin, sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$  (maximalité). connexités par arcs  $SO_n(\mathbb{R})$  est une sous-variété, simplicité. Conclusion : générateurs dans le groupe orthogonal.

### 4. Le cas de $GL_n(\mathbb{C})$

#### 4.1 Représentations

Préciser qu'une représentation, c'est chercher des quotients de  $G$  parmi les sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Important : Schur, Maschke, Toute représentation est unitarisable, c'est-à-dire équivalente à une représentation à image dans le groupe unitaire

#### 4.2 Applications en théorie des caractères

#### 4.3 Réduction simultanée

Diago/trigonalisation simultanée dans le cas abélien. Le groupe des matrices triangulaires supérieures est résoluble. Le théorème de Lie-Kolchin. Tout groupe fini ayant cette propriété est abélien.

## 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

**Motivation** : dans un ev, on aime bien connaître les familles génératrices car elles permettent de connaître entièrement une application linéaire. Là, on va essayer de comprendre les groupes avec peu d'éléments, pourvu qu'ils engendrent le groupe. (à dire à l'oral) Dans les groupes simples, on a une condition suffisante facile pour qu'une partie soit génératrice.

NE PAS FAIRE TROP DE THEORIE (exemples)

### 1. Groupe engendré par une partie

#### 1.1 Descriptions

existence du plus petit sous-groupe contenant une partie, par le haut, par le bas. Passage avec un morphisme :  $\langle \varphi(x), x \in X \rangle = \varphi(\langle X \rangle)$ . Exemple du groupe dérivé. dérivé d'un groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Théorème de Lagrange sur l'ordre d'un élément.

#### 1.2 Groupes monogènes et cycliques

groupes cycliques : extensions de Kummer. partage de clé, logarithme discret. Idéaux de  $\mathbb{Z}$ , pgcd et ppcm. Sous-groupe fini d'un corps.

#### 1.3 Groupes abéliens

un exemple rigolo :  $\mathbb{Q}^\times$  est engendré par les nombres premiers et  $-1$  donc  $\mathbb{Q}^\times \simeq \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ . Application :  $\mathbb{Q}^\times \simeq \mathbb{F}_3(X)^\times$  WTF

condition de cyclicité d'un GAF, de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ . Les GAF sont quotients des  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ .

### 2. Exemples dans le groupe symétrique

3-cycles, simplicité de  $\mathfrak{A}_n$ . Parties génératrices obtenues par simplicité (genre les  $7$ -cycles engendrent  $\mathfrak{A}_n$ ). on peut pas générer  $\mathfrak{S}_n$  par  $n-2$  transpositions calculs de groupes dérivés (groupe linéaire,  $\mathfrak{A}_n$ ). Existence d'un polynôme non résoluble par radicaux de degré 5 en générant  $\mathfrak{S}_p$  avec un  $p$ -cycle et une transposition.

### 3. Exemple géométriques

#### 3.1 Dans le groupe linéaire

générateurs dans les groupes linéaires. pivot de gauss, Smith connexité par arcs de certains sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Frobenius-Zolotarev. Famille génératrice de  $SL_2(\mathbb{Z})$ , non trivialité de son groupe dérivé.

#### 3.2 Dans le groupe orthogonal

générateurs gratuitement obtenus de  $O_n(\mathbb{R})$  après sa simplicité. Cartan-Dieudonné ?

#### 3.3 Groupes d'isométrie

générateurs du groupe diédral (et présentation)

le groupe des isométries d'un triangle équilatéral (bah c'est  $D_3$  wtf). Isométries du cube et du tétraèdre (en montrant qu'il y a une transposition). Calcul du groupe dérivé des  $D_n$ .

### Annexe

schéma d'un groupe cyclique, d'un groupe monogène infini. dessins de la partie sur la géométrie

## 120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

Ajout sympa :  $SL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  (car l'image contient les transvections). On a en corollaire  $GL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow GL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ .

### 1. L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

#### 1.1 Structure générale

construction comme quotient par l'idéal  $n\mathbb{Z}$ . Définir la relation de congruence sur  $\mathbb{Z}$ . tout morphisme d'anneau devient un morphisme du groupe additif qui correspond au quotient de sous-groupes ou un morphisme du groupe multiplicatif tous deux abéliens.

#### 1.2 Propriétés des éléments

ordre d'un élément, inversibles=générateurs=premiers à  $n$ , diviseurs de zéro, élts nilpotents, définition de l'indicatrice d'euler, cardinal des inversibles. Calcul de  $\varphi(p^\alpha)$ . tri des éléments pour  $\sum_d \varphi(d) = n$ . un exemple débile avec  $n = 12, 5 \times 5 = 1$ .

#### 1.3 Groupes cycliques

c'est un groupe monogène fini, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  donc abélien. exemple de  $\mathbb{U}_n$ . Pour chaque  $d$  il existe un unique sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'ordre  $d$ , qui est cyclique engendré par  $n/d$ . De même pour les quotients de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ! Remarque  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$  a tous ses sous-groupes cycliques mais ne l'est pas. Les idéaux de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont principaux : ce sont les sous-groupes additifs. Groupes de cardinal premier. Sous-groupe fini d'un corps : il contient au plus  $\varphi(d)$  éléments d'ordre  $d$ , donc en contient  $\varphi(d)$  donc il y a un générateur. Morphismes de groupes entre groupes cycliques. Automorphismes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (ça fait  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ ).  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  cyclique équivaut à  $n \wedge m = 1$ .

## 2. Étude du groupe des inversibles

### 2.1 Utilisation en arithmétique

Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat, exemple d'application : calcul de chez Caldero ?? 561 est de Carmichael, caractérisation des nombres premiers (item 28 dans le plan de chloé) **REVOIR**, théorème de Wilson. Application : RSA. Log discret. Test de Lucas-Lehmer.

### 2.2 Le théorème des restes chinois

énoncé pour ces anneaux-là, le morphisme devient un iso de groupe pour les inversibles,  $\varphi$  est faiblement multiplicative, application pour calculer  $\varphi(n)$  et minoration de  $\varphi(n)$ . Application aux systèmes de congruence **REF MANQUANTE**(une ref permettrait de gagner du temps, soit Berhuy soit Rombaldi). Section du morphisme chinois si non premiers entre eux **REVOIR**

### 2.3 Cyclicité du groupe des inversibles

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  corps équivaut à intègre équivaut à  $n$  premier. Cyclicité de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (perrin)

## 3. Applications

### 3.1 Corps finis

Caractéristique d'un corps : morphisme  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ . C'est un nombre premier, ça contient  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , c'est le plus petit sous-corps de  $\mathbb{K}$ . Cardinal= $p^n$ , morphisme de Frobenius, existence et unicité du corps, dénombrement des irréductibles? Carrés de  $\mathbb{F}_p$ !!!! Application à une équation diophantienne facile (l'exemple d'alice bouillet, un truc modulo 31). Théorème des deux carrés de Fermat.

### 3.2 Groupes abéliens finis

structure des GAF ?**DEMANDER**, calcul du groupe dual, représentations irréductibles d'un GAF, TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE DANS  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ !!! APPLICATION A LA FFT!!!

### 3.3 Réduction modulo $p$ de polynômes

irréd par réduction mod  $p$ , exemple **REF MANQUANTE**, critère d'eisenstein, exemple **REF MANQUANTE**

### 3.4 Autour de l'extension cyclotomique

def de  $\varphi_n$ , c'est dans  $\mathbb{Z}$ , c'est irréd, exemples, calcul par moebius, intersection d'extensions cyclotomiques, groupe de galois de ces extensions, une extension finie de  $\mathbb{Q}$  ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité, condition pour que ton petit cousin puisse lire la table de caractères.

## Annexe

# 121 - Nombres premiers. Applications

## 1. Les irréductibles de $\mathbb{Z}$

### 1.1 Décomposition en facteurs premiers

$\mathbb{Z}$  est euclidien donc factoriel. Lemme d'euclide. Valuations, Legendre, application au nombre de zéros dans 2024!. Il existe une infinité de nombres premiers

### 1.2 Utilisation en arithmétique

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps, expression de  $\varphi(n)$ , limite sup et inf de  $\varphi(n)/n$ , Moebius, expression par Moebius des polynômes cyclotomiques, RSA, théorème des 2 carrés de fermat (un mot sur  $\mathbb{Z}[i]$  dans ce cas?) **REVOIR**

### 1.3 Carrés modulo $p$

symbole de legendre, caractérisation des carrés, loi de réciprocité, frobenius-zolotarev

## 2. Nombres premiers et corps de nombres

### 2.1 Réduction modulo $p$ et groupes cycliques

contenu et lemme de gauss dans  $\mathbb{Z}$ , irréductibilités par réduction modulo  $p$  **REVOIR** les hypothèses, eisenstein,  $\varphi_n$  est irréductible **REVOIR**

### 2.2 Extensions de $\mathbb{Q}$

famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace, théorème de Gauss-Wantzel, Kronecker-Weber

## 3. Groupes finis

### 3.1 Des groupes cycliques

lemme de Gauss, exposant, cyclicité de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ .

### 3.2 $p$ -groupes

Sylow, centre d'un  $p$ -groupe

### 3.3 Théorème de Burnside

résolubilité, caractérisation par ssgroupe et quotient, caractérisation par les suites de composition premières, application aux  $p$ -sous-groupes, théorème.

## 4. Corps finis

caractéristique, cardinaux, existence et unicité, cyclicité comme corps de décomposition, le frobenius, automorphismes de  $\mathbb{F}_q$ , sous-corps de  $\mathbb{F}_q$ , dénombrement des irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$ , corps parfaits, algorithme de Berlekamp

## 5. Répartition des nombres premiers

### 5.1 Tests de primalité

Test de Wilson, de Fermat et nombres de carmichael (561), théorème de Korselt **REF MANQUANTEREVOIR**, crible d'éraosthène et complexité

### 5.2 Existence et construction de nombres premiers

Postulat de Bertrand, progression arithmétique (turbo admis) puis test de Lucas-Lehmer. Attention,  $2^{11} - 1 = 89 \times 23$ .

### 5.3 Le théorème des nombres premiers

la série des  $1/p$  diverge, on le met avant. Et puis la classique.

### 5.4 Conjectures

Goldbach, hypothèse de Riemann

## Annexe

une décomposition en facteurs premiers, éraosthène entre 1 et 100 à dessiner comme EWNA (ne pas écrire dans les cases, seulement un tableau à double entrée), domaine et fonction utilisée pour le théorème taubérien de Newman

## 122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.

smith c'est bien ? Diophantienne=buzzword, entiers de Gauss  $\mathbb{Z}[i]$ . Et  $\mathbb{Z}[j]$ . Deux carrés de fermat mes deux développements sur les chinois (c'est pas trop grave s'ils sont trop proches?)

### 1. Anneaux principaux

#### 1.1 Généralités

irréductibles, premiers, idéaux premiers, maximaux. Quotients. pgcd.

#### 1.2 Le théorème des restes chinois et conséquences

dans  $A$  principal,  $I + J = A$  équivaut à  $I \cap J = IJ$ . Exemples : le localisé est principal,  $\mathbb{D}$  est principal. Double quotient.  $\mathbb{K}[X, Y]/(Y - X^2)$  et  $\mathbb{K}[X, Y]/(XY - 1)$  sont principaux. Systèmes d'équations modulaires d'entiers.

#### 1.3 Factorialité

définition, valuation, principal implique factoriel, les irrédés sont les premiers, exemples de factoriels pas principaux. Gauss, euclide, et puis contenu !! Irréductibles de  $\mathbb{A}[X]$ . Application : polynômes minimaux d'entiers algébriques.

### 2. Anneaux euclidiens

#### 2.1 L'algorithme d'euclide

définition, euclidien implique principal,  $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ . Algorithme d'Euclide étendu, complexités dans  $\mathbb{Z}$ .

#### 2.2 Anneaux de polynômes

et séries formelles. Si  $\mathbb{A}[X]$  est principal, alors  $\mathbb{A}$  est un corps dont les éléments non nuls sont  $\mathbb{A}[X]^\times$  **REVOIR**.  $\mathbb{K}[X]$  est euclidien, complexité d'euclide étendu dans  $\mathbb{K}[X]$ . Construction d'un corps de rupture, irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et de  $\mathbb{C}[X]$ . Irréductibles de  $\mathbb{F}_p[X]$ , dénombrement. Berlekamp.

#### 2.3 Exemples d'anneaux d'entiers quadratiques

$\mathbb{Z}[\omega]$  où  $\omega$  est un entier quadratique. Condition pour que ça soit euclidien. Alors  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$  est euclidien mais pas  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$  (même pas factoriel). Les deux équations de Mordell et l'équation de Fermat pour  $n = 3$  (utiliser  $\mathbb{Z}[j]$ ). (voir Ewna, Enguerrand : **ROMBALDI pour la théorie, CVA pour la pratique.**)

### 3. Modules de type fini sur un anneau principal

#### 3.1 Sous-modules d'un module libre de rang fini

#### 3.2 Forme normale de Smith

#### 3.3 Structure des modules de type fini sur un anneau principal

#### 3.4 Applications

GAF, cayley-hamilton 100% bio, Frobenius, Jordan

### Annexe

$\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[j]$  réseaux donc c'est euclidien. Berlekamp (exemple, implémentation, sinon c'est à l'oral), Smith euclidien (implémentation sur un exemple)

# 123 - Corps finis. Applications.

## 1. Les corps finis

### 1.1 Construction

rapidement : il existe un unique corps de décomposition (unique comme  $\mathbb{K}$ -algèbre).  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps. Morphisme de Frobenius, devient un automorphisme dans le cas fini. Notion de caractéristique. Description comme  $\mathbb{F}_p$ -ev, donc on a la structure additive et aussi le cardinal. Alors il existe un unique corps fini de chaque cardinal possible. Les corps finis sont parfaits.

### 1.2 Extensions de corps finis

Groupe des automorphismes d'un corps fini. Les extensions sont toutes galoisiennes. **REVOIR**

### 1.3 Structure multiplicative dans un corps fini

cyclicité. Wilson.

## 2. Carrés dans les corps finis

### 2.1 Carrés dans un corps fini

on les compte surtout, on les caractérise

### 2.2 Classification des formes quadratiques

le discriminant classe les non dégénérées

### 2.3 Loi de réciprocité quadratique

comme corollaire **REVOIR**. Le polynôme  $X^4 + 1$  est toujours scindé dans  $\mathbb{F}_{p^2}$ , application :  $\sqrt{i} + \sqrt{i}^{-1}$  permet de trouver une racine de 2. Mettre à la puissance  $p$  pour savoir si c'est dans  $\mathbb{F}_p$ , et ça calcule  $\left(\frac{2}{p}\right)$  **WTF**. Application : nombres de Mersenne (peut-être ne pas faire Lucas-Lehmer mais faire joujou avec la réduction modulo 12).

## 3. Algèbre linéaire sur un corps fini

### 3.1 Le groupe linéaire

dénombrement de GL, SL, PGL, PSL,  $P^1(\mathbb{F}_q)$ . Divisibilités improbables :  $|\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_p)||\mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{F}_p)|$  divise  $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$ . Application : Sylow **REVOIR**, isomorphismes exceptionnels. Réduction modulo  $p$  de  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$  et de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ . Frobenius-Zolotarev.

algèbre linéaire :  $M$  dz si et seulement si  $M^q = M$ .

### 3.2 Codes correcteurs d'erreurs

?

## 4. Polynômes et corps finis

### 4.1 Polynômes à coefficients dans un corps fini

dénombrement des irréductibles, irréductibles de tout degré. Berlekamp.

### 4.2 Le lemme de Gauss dans $\mathbb{Z}$

contenu dans  $\mathbb{Z}$ , irréductibles de  $\mathbb{Z}[X]$

### 4.3 Critères d'irréductibilité

critère d'eisenstein, réduction modulo  $p$ . Le polynôme dont le groupe de galois est  $\mathfrak{S}_p$ . L'exemple de  $X^4 + 1$  irréductible mais réductible modulo tout  $p$ . Iréd de  $\varphi_n$ , progression arithmétique faible et l'application aux GAF

## Annexe

tables d'addition et de multiplication  $\mathbb{F}_4$ . un calcul d'un symbole de Legendre. Un berlekamp. Diagramme d'extensions de corps pour les premiers  $\mathbb{F}_{p^n}$ .

## 125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

retrouver cet exo où on applique la base télescopique pour prouver l'irréductibilité de polynômes. Un critère nécessaire et suffisant pour être irréductible : avec  $\deg(P) \geq 2$ , et avec primalité (cf Perrin)

### 1. Extensions de corps

#### 1.1 Algébricité

algébricité, transcendance. Polynôme minimal. extensions finies, le théorème de la base télescopique. Les éléments algébriques forment un corps. Trace, norme. Exemple : Famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace.

#### 1.2 Prolongement des morphismes

éléments conjugués

#### 1.3 Corps de rupture, de décomposition

rupture, insuffisance du corps de rupture ( $X^3 - 2$ ), corps de décomposition, degré d'icelui divisant  $n!$ . Extensions normales (on peut le définir avec une clôture algébrique, ou pas forcément : le corps de déc est suffisant). Existence d'une clôture algébrique (Steinitz).  $\overline{\mathbb{Q}}$  est alg clos. Possible application : les  $\Sigma_i$  ne vérifient aucune relation. L'exemple de  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ . Application :  $P$  irréductible  $\Leftrightarrow P$  n'a pas de racine dans une extension de degré  $\deg(P)/2$  ou moins.

Séparabilité. Le polynôme  $X^p - a$  est irréductible ssi n'a pas de racine ( $p$  premier, indispensable pour les corps parfaits)

#### 1.4 Problèmes de descente

rang, degré du polynôme minimal, conjugaison de matrices dans  $GL_n$  (un contre-exemple avec  $SL$ ? Il faudrait le bouquin de Berhuy. Isotropie. pgcd entre polynômes. Conséquence : le théorème de l'élément primitif.

### 2. Exemple de corps et d'extensions

#### 2.1 Les corps finis

Extensions de corps finis. Les corps finis font des extensions galoisiennes. Exemple de  $X^4 + 1$ , application au calcul de  $\left(\frac{2}{p}\right)$ . Application : Dirichlet faible. Une clôture algébrique des  $\mathbb{F}_q$ .

#### 2.2 L'extension cyclotomique

Polynômes cyclotomiques. Intersections et composition d'extensions cyclotomiques. Intersection avec **REVOIR**

### 3. Théorie de Galois en caractéristique nulle

on va se donner une  $\Omega$  clôture algébrique de  $\mathbb{K}$ .

#### 3.1 Groupe de Galois

Application : structure des polynômes symétriques (on a 2 preuves de l'unicité!)

Discriminant, inclusion dans  $\mathfrak{A}_n$ . Kronecker-Weber faible.

Exemple : Groupe de Galois de la famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace

$\sqrt{4 + \sqrt{5}}$  n'engendre pas une extension galoisienne. Son groupe de Galois est  $D_4$ .

Applications : Dunford. Petit cousin, représentations, Burnside.

#### 3.2 La correspondance de Galois

problème inverse GAF

#### 3.3 Résolubilité par radicaux

kummer, la CNS, contre-exemple dans  $\mathbb{F}_2$ . un polynôme non résoluble l'équation générale Il convient de donner des exemples.  $X^6 + 3 * X^4 + 2 * X^3 + 3 * X^2 + 1$  est réciproque (il se trouve qu'il est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , son groupe est d'ordre  $48 = 3!2^3$  (maximal pour un poly réciproque de degré 6) DONC résoluble.

### Annexe

des diagrammes d'extensions. Treillis de sous-groupes et application au treillis des sous-extensions.

# 127 - Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

Boyer, Petit Compagnon des nombres. Théorie des nombres, Daniel Duverney  
**LA FFT????**. On peut passer un peu plus de temps sur la constructibilité.

## 1. Propriétés remarquables d'un nombre réel

### 1.1 Les entiers et les rationnels

Développement décimal. Les nombres décimaux, dyadiques, rationnels. Ils sont denses. Structure. Approx diophant. Mersenne (juste mettre Lucas-Lehmer. Le prétexte c'est trouver des grands premiers)

### 1.2 Nombres algébriques

nombres algébriques, polynôme minimal irréductible, degré d'extensions, base télescopique. ils sont dénombrables norme, trace. famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace cyclotomie

Nombres constructibles Théorème de Wantzel (extensions constructibles). Théorème de Gauss-Wantzel (polygones constructibles, **REVOIR**)

### 1.3 Nombres transcendants

géométrie et  $SO_2(\mathbb{R})$ . Construction de  $\pi$ . La transcendance de  $\pi$  et celle de  $e$ . Liouville. La suite  $\cos(n)$  est dense dans  $[-1, 1]$ .  $\zeta(2k)$  sont transcendants  $\exp$  d'un nombre algébrique est transcendant (admis).

## 2. Théorie de Galois sur $\mathbb{Q}$

### 2.1 Le groupe de Galois

dans une extension galoisienne, il permute transitivement les racines d'un polynôme ss'il est irréd. L'extension cyclotomique. Discriminant, Kronecker-Weber faible. Groupe de la famille  $\mathbb{Q}$ -libre. Groupe de l'extension cyclotomique. Groupe d'une extension radicale.  $\sqrt{4 + \sqrt{5}}$  n'engendre pas une extension galoisienne. Son groupe de Galois est  $D_4$ . Les  $X^5 - p^2X + p$  ne sont pas résolubles.

### 2.2 La correspondance de Galois

### 2.3 Résolubilité par radicaux

Exemple d'un nombre obtenu par radicaux. Kummer (c'est une machine à faire apparaître des radicaux : des nombres remarquables). exemple d'un polynôme non résoluble **Il convient de donner des exemples**.  $X^6 + 3 * X^4 + 2 * X^3 + 3 * X^2 + 1$  est réciproque (il se trouve qu'il est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , son groupe est d'ordre  $48 = 3!2^3$  (maximal pour un poly réciproque de degré 6) DONC résoluble.

## 3. Entiers algébriques

### 3.1 Anneaux d'entiers algébriques

poly min d'un entier alg, thm de kronecker. Caractères d'un groupe, petit cousin, Burnside.

### 3.2 Exemples quadratiques

le retour de  $\mathbb{Z}[\omega]$ . **REVOIR** (avec la leçon 122) (deux carrés de fermat). l'anneau  $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{19})/2]$ .

### 3.3 Nombres de Pisot-Vijayaraghavan

nombres de Pisot. (le nombre d'or). L'inverse d'un pisot inférieur strictement à 2 est un entier algébrique, une puissance de pisot est un pisot. Les rationnels qui sont de pisot sont les  $> 1$ .

# 141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

**retrouver** cet exo où on applique la base telescopique pour prouver l'irréductibilité de polynômes. Un critère nécessaire et suffisant pour être irréductible : avec  $\deg(P) \geq 2$ , et avec primalité (cf Perrin) (voir aussi le plan de Julien 141) polynômes d'Artin-Schreier, et  $X^p - X - 1$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .

## 1. Irréductibilité

### 1.1 Définition et premières propriétés

Définition sur un anneau. Importance du corps de base. Irréductibles sur un corps algébriquement clos, et dans  $\mathbb{R}[X]$ . Cas des polynômes de degré 2, 3. Notion de séparabilité.

### 1.2 Critères d'irréductibilité

Eisenstein, réduction modulo  $p$ . Le polynôme  $X^p - a$  est irréductible ssi n'a pas de racine ( $p$  premier, indispensable pour les corps parfaits)

### 1.3 Polynômes irréductibles dans un anneau factoriel

Contenu, primitifs.  $\mathbb{A}[X]$  est factoriel et description de ses irréductibles. Polynôme minimal d'un entier algébrique. Lemme de Kronecker (la preuve à toto) et application aux sous-groupes finis de  $GL_n(\mathbb{Z})$ .

## 2. Extensions de corps

### 2.1 Algébricité

algébricité, transcendance. Le polynôme minimal est irréductible. Extensions finies, le théorème de la base télescopique. Les éléments algébriques forment un corps. Isotropie.

### 2.2 Etude d'extensions de corps

Trace, norme, polynôme minimal et caractéristique de l'endomorphisme de multiplication. Algèbre linéaire : les facteurs irréductibles de  $\chi_A$  sont les mêmes que  $\mu_A$ . Exemple : Famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace. Théorème de l'élément primitif (belle utilisation de l'irréductible).

### 2.3 Corps de rupture, de décomposition

Construction du corps de rupture d'un polynôme irréductible. insuffisance du corps de rupture ( $X^3 - 2$ ), corps de décomposition, degré d'icelui divisant  $n!$ . Extensions normales (on peut le définir avec une clôture algébrique, ou pas forcément : le corps de décomp est suffisant). Application :  $P$  irréductible  $\Leftrightarrow P$  n'a pas de racine dans une extension de degré  $\deg(P)/2$  ou moins.  $\overline{\mathbb{Q}}$  est alg clos.

## 3. Exemple de corps et d'extensions

### 3.1 Corps finis

Construction des corps finis. Dénombrément des irréductibles de  $\mathbb{F}_q$ . Algorithme de Berlekamp.

### 3.2 L'extension cyclotomique

Polynômes cyclotomiques. Intersections et composition d'extensions cyclotomiques. Intersection avec **REVOIR**

## 4. Théorie de Galois en caractéristique nulle

on va se donner une  $\Omega$  clôture algébrique de  $\mathbb{K}$ .

### 4.1 Groupe de Galois

Le groupe de Galois agit transitivement sur les racines de  $P$  si et seulement s'il est irréductible.

Exemple : Groupe de Galois de la famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace

Applications : Dunford. Petit cousin, Burnside.

**Il convient de donner des exemples.**  $X^6 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 1$  est réciproque (il se trouve qu'il est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , son groupe est d'ordre  $48 = 3!2^3$  (maximal pour un poly réciproque de degré 6) DONC résoluble.

### 4.2 La correspondance de Galois

problème inverse GAF (dire "il existe un polynôme irréductible dont le corps de décomposition a le GAF")

### 4.3 Résolubilité par radicaux

Kummer, la CNS, contre-exemple dans  $\mathbb{F}_2$ . un polynôme non résoluble (il est irréductible hein!)

## Annexe

tours de corps finis

## 142 - PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

### 1. Anneaux à PGCD

#### 1.1 Notion de PGCD

définition comme un inf/sup, associativité, un exemple débile dans  $\mathbb{Z}$ , les 3 cavaliers du pgcd (les 3 implications générales),  $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ , élt's copremiers, anneaux à pgcd=anneaux à ppcm, pgcd $\Rightarrow$ propriété p.p, lemme de Gauss, lemme d'Euclide, anneaux à pgcd=anneaux à ppcm, distributivité?

#### 1.2 Le cas des anneaux factoriels et principaux

expression du pgcd dans anneau factoriel, et théorème de Bézout. Exemples d'anneaux factoriels pas principaux (sans le dire), exemples de  $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$  et  $\mathcal{H}(U)$  (admis pour l'instant).

#### 1.3 Polynômes dans un anneau à pgcd

contenu, pp $\Rightarrow$ lemme de Gauss, primitivation, irréductibles de  $A[X]$  en fonction de ceux de  $\mathbb{K}[X]$ , les entiers algébriques ont leur polynôme minimal dans l'anneau, calcul de pgcd dans  $A[X]$  en passant par le corps des fractions et le lemme de Gauss (exemple dans  $\mathbb{Z}[X]$  et  $\mathbb{K}[X, Y]$ ).

#### 1.4 Résultant dans un anneau à pgcd

définition, propriété fondamentale (détecte les facteurs communs), les entiers algébriques sont un anneau, intersection de courbes et équation d'une courbe paramétrée

### 2. Algorithme autour du pgcd

#### 2.1 Anneaux euclidiens

Sont principaux. Algorithme d'euclide étendu, complexité en divisions euclidiennes. Exemples :  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[j]$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}[[X]]$ . pgcd( $X^n - 1, X^m - 1$ ).

#### 2.2 Calcul du pgcd dans $\mathbb{Z}$

L'algorithme binaire ( $\log(n)$  si on peut travailler efficacement en binaire). Coût d'une DE dans  $\mathbb{Z}$  est  $O(\log(u)(\log(u) - \log(v)))$ . Euclide étendu sur  $\mathbb{Z}$  coûte  $O(\log(N)^2)$ .

#### 2.3 Calcul du pgcd dans $\mathbb{K}[X]$

Coût d'une DE de  $P$  par  $Q$  :  $O(q(p - q))$  (les degrés). Donc euclide étendu coûte  $O(pq)$ .

### 3. Applications en algèbre

#### 3.1 Le théorème des restes chinois

énoncé dans un anneau principal (osef de l'énoncé commutatif intègre...), systèmes de congruences, interpolation de Lagrange, algorithme de Berlekamp, lemme des noyaux, décomposition de Dunford (mettre en annexe le diagramme, dans le plan on ne mettra que  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $u$ , le reste oseb)

#### 3.2 Matrices à coefficients dans un anneau principal

Existence de Smith, unicité, structure des GAF, forme de Frobenius et de Jordan? Application : un scoop sur Cailey-Hamilton.

#### 3.3 Arithmétique et groupes

Résolution de l'équation affine diophantienne, supplémentaires dans  $\mathbb{Z}^n$ ?, indicatrice d'Euler, théorème d'Euler dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ ,  $\varphi(n) \geq n/\log_2(n)$ , ordre d'éléments dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , morphismes entre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (ça fait le pgcd), exposant d'un groupe et monogénèse d'un sous-groupe multiplicatif fini d'un corps

#### 3.4 Rigidité du pgcd

le pgcd de polynômes est invariant par extension de corps. Application : le théorème de l'élément primitif.

### Annexe

Algorithme (binaire, euclide étendu), une matrice 3x3 smithée, un exemple pour berlekamp?, un pgcd dans  $\mathbb{K}[X, Y]$ , courbes algébriques, le carré commutatif

# 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

**Motivation :**  $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)/\mathbb{K}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$  est-elle résoluble (exprimer les uns en fonction des autres) ?

## 1. Racines d'un polynôme

définition. Divisibilité (dans un anneau commutatif), borne du nombre de racines (dans un anneau intègre), exemple de  $2X$  qui a 2 racines dans  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Exemples simples :  $X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}$ , 1 est racine de  $X^2 + X - 2$ .

Application : le déterminant de Cauchy, le déterminant de Vandermonde. Application : Tout sous-groupe fini de  $\mathbb{K}^\times$  est cyclique. Application : caractérisation des carrés de  $\mathbb{F}_p$ . Corollaire : rigidité des polynômes. Polynômes interpolateurs. Le morphisme qui à un polynôme donne la fonction polynomiale est injectif ssi  $\mathbb{K}$  est infini.

### 1.1 Multiplicité

Définition, factorisation par  $(X - a)^m$ , minoration du degré de  $P$ , égalité quand scindé et déf de scindé. Formule de Taylor. , application : D'Alembert-Gauss. Autre application : en caractéristique nulle,  **$a$  est racine d'ordre  $m$  ssi pour  $k < m$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$  et  $P^{(m)}(a) \neq 0$ . Si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , alors  $P'$  aussi.** Séparabilité, corps parfaits. Dérivée logarithmique, Gauss-Lucas.

### 1.2 Polynôme symétriques, relations coefficients-racines

Algorithme de Waring, unicité. Relations coefficients-racines. Discriminant ! **en degré 2,3!** Exposition du problème : peut-on résoudre  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{K}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$  ? Forme de Hankel. Bornes racines-coefficients et inversement. Gershgorin. TIL et continuité des racines.

### 1.3 Application en algèbre linéaire

polynôme caractéristique, valeurs propres. caractérisation des trigonalisables, diagonalisables. Dunford, Jordan ? Matrices compagnon. Application : Lemme de Kronecker. Application : méthode QR.

## 2. Extensions de corps

### 2.1 Algébricité

algébricité, transcendance. Le polynôme minimal est irréductible. Extensions finies, le théorème de la base télescopique. Les éléments algébriques forment un corps. Isotropie.

### 2.2 Etude d'extensions de corps

Trace, norme, polynôme minimal et caractéristique de l'endomorphisme de multiplication. Algèbre linéaire : les facteurs irréductibles de  $\chi_A$  sont les mêmes que  $\mu_A$ . Exemple : Famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace. Théorème de l'élément primitif (belle utilisation de l'irrédu). Cyclotomie.

### 2.3 Corps de rupture, de décomposition

Construction du corps de rupture d'un polynôme irréductible. insuffisance du corps de rupture ( $X^3 - 2$ ), corps de décomposition, degré d'icelui divisant  $n!$ . Extensions normales (on peut le définir avec une clôture algébrique, ou pas forcément : le corps de déc est suffisant). Application :  $P$  irréductible  $\Leftrightarrow P$  n'a pas de racine dans une extension de degré  $\deg(P)/2$  ou moins.  $\overline{\mathbb{Q}}$  est alg clos.

Construction des corps finis, les corps finis font des extensions galoisiennes.

## 3. Théorie de Galois en caractéristique nulle

on va se donner une  $\Omega$  clôture algébrique de  $\mathbb{K}$ .

### 3.1 Groupe de Galois

Le groupe de Galois agit transitivement sur les racines de  $P$  si et seulement s'il est irréductible.

Exemple : Groupe de galois de la famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace

Applications : Dunford. Petit cousin, Burnside.

Le groupe de  $\sqrt{4 + \sqrt{5}}$  est  $D_4$ , il n'engendre pas une extension galoisienne.

### 3.2 La correspondance de Galois

problème inverse GAF (dire "il existe un polynôme irréductible dont le corps de décomposition a le GAF")

preuve de Waring par relation coefficients-racines (pour l'unicité) et étude du groupe de Galois de l'extension  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/\mathbb{K}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$ .

### 3.3 Résolubilité par radicaux

kummer, la CNS, contre-exemple dans  $\mathbb{F}_2$ . un polynôme non résuble (il est irréductible hein!) **Il convient de donner des exemples.**  $X^6 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 1$  est réciproque (il se trouve qu'il est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , son groupe est d'ordre  $48 = 3!2^3$  (maximal pour un poly réciproque de degré 6) DONC résoluble.

# 148 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

**Galois jsp.** On peut toujours essayer de dire que le degré d'une extension permet de calculer le groupe de Galois (exemple avec celui de  $\sqrt{4 + \sqrt{5}}$  où la fin de l'argument est combinatoire). Indépendance linéaire des éléments du groupe de Galois.

## 1. Espaces vectoriels de dimension finie

### 1.1 Familles génératrices, libres, bases

notion de famille libre, de base. Image de telles familles par injection, surjection linéaire.

### 1.2 Le théorème de la dimension

Pivot de Gauss, théorème de la dimension. Base extraite, incomplète. Inclusion et dimensions égales. Dimension de la somme directe. Formule de Grassmann. **Construction du produit tensoriel, dimension!**

### 1.3 Quotients d'espaces vectoriels

## 2. Rang

### 2.1 D'une application linéaire

définition, théorème du rang, caractérisation de injective/bijective, AL d'évaluation d'un polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$  en  $n$  valeurs différentes (vandermonde from AL)

### 2.2 D'une matrice

C'est le rang de la famille des colonnes, ou des lignes, ou de l'AL définie sur n'importe quelle base. déterminant (supposé connu mais dire à quoi il sert), caractérisation du rang par les mineurs, invariance du rang par extension de corps. Matrices équivalentes. Vandermonde, version matrice.

### 2.3 En calcul différentiel

théorème du rang constant ?

### 2.4 Dualité en dimension finie

### 2.5 Réduction des endomorphismes

Cailey-Hamilton, lemme des noyaux. caractérisation des endos tz, dz, Dunford, invariants de similitude.

## 3. Représentations de groupes

### 3.1 Etude par l'algèbre linéaire

Définition. Morphismes. Sous-représentations. New from old (ne pas oublier  $\text{Hom}_{\text{Vec}}(V, V')$  qui est une représentation dont les fixes est  $\text{Hom}_G(V, V')$ ). Diagonalisabilité. Lemme de Schur. Lemme de Maschke. Projecteur vers les fixes. Exemples : représentation régulière, représentation standard du groupe symétrique.

### 3.2 Théorie des caractères

définition, c'est un morphisme si  $\dim(V) = 1$ , calcul de caractères, espace des fonctions centrales et son produit scalaire, les caractères en sont. Si  $V = \bigoplus_i V_i^{n_i}$ , alors  $\langle V, V_i \rangle = n_i$ . Les caractères irréductibles sont une bon des fonctions centrales. Orthogonalités de la table des caractères.  $\frac{\chi(C)|C|}{\chi(e)}$  est entier algébrique. Le rang d'une représentation irréductible divise  $|G|$ .

## 4. Extensions de corps

### 4.1 Algébricité

algébricité, transcendance. Le polynôme minimal est irréductible. Extensions finies, le théorème de la base télescopique. Les éléments algébriques forment un corps. Isotropie!

### 4.2 Etude d'extensions de corps

Trace, norme, polynôme minimal et caractéristique de l'endomorphisme de multiplication. Algèbre linéaire : les facteurs irréductibles de  $\chi_A$  sont les mêmes que  $\mu_A$ . Exemple : Famille  $\mathbb{Q}$ -libre par la trace. Théorème de l'élément primitif (belle utilisation de l'irréd). Cyclotomie.

### 4.3 Corps de rupture, de décomposition

Construction du corps de rupture d'un polynôme irréductible. insuffisance du corps de rupture ( $X^3 - 2$ ), corps de décomposition, degré d'icelui divisant  $n!$ . Extensions normales (on peut le définir avec une clôture algébrique, ou pas forcément : le corps de déc est suffisant). Application :  $P$  irréductible  $\Leftrightarrow P$  n'a pas de racine dans une extension de degré  $\deg(P)/2$  ou moins.  $\overline{\mathbb{Q}}$  est alg clos.

Construction des corps finis, sous-corps de corps finis, les corps finis font des extensions galoisiennes. BERLEKAMP

#### 4.4 Application : théorie de Galois

Dunford, petit cousin. Correspondance de Galois, insister sur les preuves où on regarde le degré de l'extension. Calcul du groupe de  $\sqrt{4 + \sqrt{5}}$ . Extensions de Kummer, on insiste sur le fait qu'elles viennent de la réduction.

# 149 - Déterminant. Exemples et applications.

rôle du det dans l'étude des formes quadratiques ?

## 1. Déterminant d'une matrice carrée

### 1.1 Formes $n$ -alternées

Définition explicite du déterminant par la formule, sur un anneau commutatif.  $n$ -alternance. Deux formes  $n$ -alternées sur un module libre de rang fini ( $R$  anneau commutatif) coïncident si et seulement si elles coïncident en  $(e_1, \dots, e_n)$ . c'est la seule forme  $n$ -alternée valant 1 en l'identité (en les éléments de la base du coup). Déterminant par rapport à une base, changement de base. Déterminant d'une matrice : c'est par rapport à la base canonique. Déterminant d'un endomorphisme : définition par : si  $\varphi$   $n$ -alternée, alors  $\varphi \circ u = \det(u)\varphi$ . Multiplicativité du déterminant.

### 1.2 Propriétés du déterminant

Déterminant diagonal, Déterminant des transvections, application au calcul d'un déterminant quelconque (pivot). Ainsi, on a le déterminant par blocs.

Cauchy-Binet, Unicité de la forme normale de Smith, lien entre invariants de Similitude et les coefficients.

Développement par rapport à une ligne/colonne.

Formule de la comatrice, caractérisation des matrices inversibles. Caractérisation des matrices surjectives ou injectives. propriétés de la comatrice, comatrice en dimension 2

déterminant d'une matrice par blocs carrés de même taille ? (c'est la formule de Leibniz mais avec les blocs, et on en prend le det). Application :  $\det(A \otimes B)$ .

Zolotarev ? **REVOIR**.

### 1.3 Calculs de déterminants

Effet des opérations élémentaires, Gauss. LU, compléments de schur

Gruppensdeterminant ??**REVOIR**. Déterminant de la table de caractère (vient de l'orthogonalité je crois, c'est fastoche). Déterminant circulant et suite de polygones.

$\det(A + XY^T)$ , application au déterminant de Hurwitz **REF MANQUANTE**

### 1.4 Rang d'un endomorphisme

Mineurs caractérisent le rang. Applications : majoration du rang de la réduite mod  $p$ ; invariance du rang par rapport au corps; semi-continuité inférieure du rang

## 2. Déterminants et polynômes

### 2.1 Polynomialité du déterminant

lisseur quand  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . non connexité de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Van der Monde, Déterminant de Cauchy. Le déterminant d'une antisymétrique est un carré. Pfaffien, les matrices symplectiques sont de déterminant 1.

### 2.2 Le polynôme caractéristique

Racines du polynôme caractéristique. Cailey-Hamilton, la preuve 100% bio. Le scoop via Smith. Matrice compagnon.

### 2.3 Résultant

Résultant, méthodes de calcul. Discriminant ? formule de Héron **REF MANQUANTE**

## 3. Applications

### 3.1 Déterminant et géométrie affine

Equation de droites (matrice 3x3, application : théorème de Ménalaus ?**REVOIRREF MANQUANTE**), équation de cercles.

### 3.2 Le déterminant et l'analyse

$\det(S)^{1/n}$  est concave sur  $S_n^+(\mathbb{R})$  (pour  $H, K$  symétriques déf positives, on a  $HK = K^{-1/2}K^{1/2}HK^{1/2}K^{1/2}$  conjuguée à une matrice sym pos donc dz à vp positives). Donc IAG, puis l'exprimer comme un min (atteint car évaluer  $K$  en  $H^{-1}$ ) d'une famille de formes linéaires, et on peut même étendre à  $S_n^+(\mathbb{R})$  car c'est le bord donc l'inégalité large reste vraie. C'est suffisant pour la concavité!), le résultat est optimal car l'expression est homogène (**WTF**). Application :  $\det(S)$  est log-concave.

diff du det, wronskien.

### 3.3 Le déterminant en géométrie

Matrice de Gram, théorème de Müntz. Inégalité d'Hadamard (interprétation à l'oral : volume de simplexe). action d'une matrice sur le volume, cgt variable + Ellipsoïde, sous-groupes compacts.

## Annexe

un calcul de déterminant 3x3 par développement selon une colonne. une ellipsoïde en dim 2.

# 150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

## 1. Polynômes d'endomorphismes

### 1.1 Premiers éléments de réduction des endomorphismes

Polynôme minimal valeurs propres, espaces propres, espaces caractéristiques Polynôme caractéristique suite exacte 100% bio  $A^{-1}$ ,  $A^k$  à l'aide d'un polynôme annulateur (DE)

### 1.2 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

dimension, isomorphisme naturel avec  $\mathbb{K}[u]/(\mu_u)$ . base  $\text{id}, u, u^2, \dots$  inversibles, condition pour être un corps. Lemme des noyaux. Idempotents de  $\mathbb{K}[u]$ . Le carré commutatif.

### 1.3 Module associé à un polynôme

Le module associé à un endo. Sous-modules, semi-simplicité. Endos cycliques, polynôme minimal ponctuel. caractérisation par  $\mu_u = \chi_u$ . Caractérisation des endos cycliques par la monogénèse de  $E_u$ .

## 2. Réduction des endomorphismes

### 2.1 Diagonalisation et trigonalisation

carac des matrices dz en corps finis. Exemple des projecteurs et symétries. Co-tz, Co-dz. Lie-Kolchin? c'est ceux qui n'ont pas de facteur carré. dans un corps parfait, c'est ceux qui sont diagonalisables dans un surcorps.

### 2.2 Décomposition de Frobenius et de Jordan

Forme normale de Smith. Matrices compagnon, caractérisation des endomorphismes cycliques par  $\mathbb{K}[u] = C_u$ ? Frobenius, calcul des invariants de similitude. Jordan

### 2.3 La décomposition de Dunford

dunford effectif (méthode de newton) **REF MANQUANTEREVOIR** décomposition en sous-espaces caractéristiques (restes chinois), dunford en polynômes de matrices, surj de l'exponentielle et aussi dans  $\mathbb{R}$ . dunford semi-simple

### 2.4 Application en théorie des nombres

FAMILLE LIBRE PAR LA TRACE kummer, conséquence : les équations résolubles (sans s'appesantir)

## 3. Applications de la diagonalisabilité en théorie des groupes

### 3.1 Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$

Kronecker et  $GL_n(\mathbb{F}_3)$ .

### 3.2 Les représentations d'un groupe fini

Schur, Maschke **Partie intéressante mais ça doit pas être trop gros... est-ce que c'est bien?**

### 3.3 Théorie des caractères

centre et sous-groupes distingués dans la table. Burnside (surtout les lemmes qui précèdent!), petit cousin.

# 151 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

## Motivations.

- Diviser pour mieux régner : simplifier un problème a priori difficile de par la grande dimension (la classification des classes de similitude, etc) en le fractionnant sur des sous-espaces stables, ce qui revient essentiellement à regarder sa matrice par blocs.
- Comprendre l'action conjointe d'une famille d'endomorphismes agissant sur l'espace : existence de bases de diagonalisation/trigonalisation commune, espaces stables, etc.
- Trouver des invariants pour l'action d'un endom. pour  $\mathbb{R}$  : plan laissé stable  
 $SO_n(\mathbb{R})$  est simple : remarquer l'utilisation du principe de conjugaison et des espaces stables

## 1. Espaces stables, endomorphismes induits, dualité

### 1.1 Espace stable par un endomorphisme

def. Passage au quotient! La suite qui s'essouffle. Si  $u$  stabilise tous les ss-espaces d'un rang  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , alors  $u$  est une homothétie. Lemme de fitting, la suite des noyaux s'essouffle. Un endomorphisme stabilisant tous les sev de dimension 1 est une homothétie.

### 1.2 Dualité

SSI  $F \subset E$  est  $u$ -stable,  $u^*$  stabilise  $F^\circ$ . Application : un endo d'un ev algébriquement clos laisse stable une droite et aussi un hyperplan. Application : hyperplans stables voir fleuriaux par  $M$ , et on les connaît si  $M$  est dz. On a la même pour les espaces euclidiens!

## 2. Applications à la théorie de la réduction

### 2.1 Polynômes d'endomorphisme et valeurs propres

polynôme minimal, polyôme caractéristique, polynôme minimal ponctuel, cailey-hamilton montré à l'aide des sous-espaces cycliques engendrés! Valeurs propres. Endomorphismes qui commutent.

### 2.2 Endomorphismes diagonalisables, endomorphismes trigonalisables

caractérisations

### 2.3 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Le lemme des noyaux, décomposition en sous-espaces caractéristiques, le diagramme commutatif, et DUNFORD!!!  
 dunford semi-simple.

### 2.4 Réduction des endomorphismes normaux

on récurre

### 2.5 Forme de Jordan, Frobenius

Caractérisation de la similitude en dim 2 et 3 (c'est juste  $\chi$  et  $\pi$ ). Descente de similitude. Similitude avec le transposé.  $C_u = \mathbb{K}[u] \Leftrightarrow u$  est cyclique.

## 3. Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes

### 3.1 Réduction simultanée

Si  $A$  et  $B$  sont dz, alors la multiplication  $M \mapsto AMB$  et  $M \mapsto AM + MB$  sont aussi dz! et là y'a Lie-Kolchin.

### 3.2 Représentations d'un groupe fini

### 3.3 Théorie des caractères

### 3.4 Utilisation du groupe de Galois

le sous-espace stable par le groupe c'est le corps de base jpp : on a dunford semi-simple, et Waring. Petit Cousin.

# 155 - Exponentielle de matrices. Applications.

(Rombaldi, Mneimé-Testard) Truc peut-être sympa :  $M^*X + XM = H$ , on a  $X =$  formule intégrale, voir photo téléphone (notes de julien 155). Je sais pas le prouver.

Méthode de variation de la constante : les colonnes de  $e^{tA}$  forment une base du système homogène. **REVOIR**

## 1. Exponentielle d'une matrice

### 1.1 Construction

norme d'algèbre, l'espace des matrices est complet, ACV donc CV, puis CV. Exemples sur la matrice nulle, sur  $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}\right)$  (trigo), exemple sur des matrices nilpotentes.

### 1.2 Propriétés

matrice de l'exp d'une matrice,  $\exp(AB)$  quand  $[A, B] = 0$ ,  $e^A$  est un polynôme en  $A$  donc dans le bicommutant. Inversibilité et inverse. Conjugaison complexe, transposition. Déterminant.

### 1.3 Interactions avec la réduction des endomorphismes

Conjugaison par une matrice, effet sur les valeurs propres. conservation des diagonales, des triangulaires et forme obtenue. dunford réel (même si pas scindé), et complexe (toujours scindé), polynomialité de la décomposition. dunford multiplicatif. déc de dunford d'une exponentielle. Conservation des sous-espaces caractéristiques.  $e^A$  diag équivaut à  $A$  diag. Application à un calcul explicite (il faut une méthode pour calculer les projecteurs vers les sev caractéristiques par contre, **REVOIR**). Exemple d'un calcul 3x3 **REF MANQUANTE**

## 2. Application aux équations différentielles

### 2.1 Propriétés de l'exponentielle à 1 paramètre

Expression (naïve, comme somme) de la différentielle première, expression de  $d\exp_A(H)$  si  $H \in C_A$ . dérivée de  $e^{tA}$  (unique solution de cette equa diff. Attends **WTF** parce que c'est une équation diff de matrices c'est pas la même que la suivante...), caractérisation de  $AB = BA$  par  $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ .

### 2.2 Equations différentielles et stabilité

Equa diff  $X' = AX$ , solutions. Cas particulier pour  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  "on retrouve sin et cos comme base de l'espace des solutions homogènes"**WTF**. METHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE : LES COLONNES DE  $e^{tA}$  FORMENT UNE BASE DU SYSTEME HOMOGENE. Différentielle du déterminant de  $e^{tA}$ . Formule de Duhamel (forme résolue de l'edl). **REVOIRREF MANQUANTE**. Limite de  $e^{tA}$  (le spectre est-il  $\text{Re} < 0$  ?), conséquence sur les solutions de  $AX = X'$ . Théorème de Stabilité de Liapounov !!!

### 2.3 Sous-groupes à 1 paramètre

sous-groupes à 1 paramètre **REVOIR**

## 3. Propriétés différentielles et restrictions

### 3.1 Régularité

truc rigolo : inégalité corde-arc IV.2.1. formule de Trotter-Kato, ou cas particulier :  $(I_n + M/m)^m \rightarrow e^M$ , ou  $e^M = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_n + 1/n f_n)^n$  où  $f_n \rightarrow_n f$ . L'exponentielle est lisse.

### 3.2 Séries formelles

un bout sur les séries formelles, produit de Cauchy et composée, application au logarithme (sa série entière classique) qui est donc réciproque de l'exponentielle sur une petite boule

### 3.3 Images de l'exponentielle

ni injective sur  $\mathbb{R}$ , ni surjective. Image de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , image de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , donc  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe et existence d'une racine  $p$ -ième. Image de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  pk c'est surjectif? Image de  $AH$  (c'est  $SU_n(\mathbb{C})$ ) (les skew hermitians). L'exponentielle de matrices hermitiennes qui est un difféo lisse (resp  $S_n^{++}$ ). Application !!! Expression lisse de la racine carrée d'une matrice hermitienne déf pos. Application : La décomposition polaire (réelle comme complexe) est super lisse.

## Annexe

dessin des rotations (obtenues comme exemples au début)

## 157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

équation de liapunov/sylvester? :  $A^*X + XA = H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$  (étude des points d'équilibre).

### 1. Différents points de vue sur les matrices hermitiennes

#### 1.1 Matrices hermitiennes et symétriques

décompositions d'espaces de matrices : somme de H et iH, somme de S et A, somme de S et iA (ça fait H).  
Corollaire : dim de H ça fait  $n^2$ . endomorphismes auto-adjoints

#### 1.2 Formes hermitiennes, quadratiques

on étudie les formes quadratiques, et on montre que leur matrice dans une base (pas forcément orthonormée) ça fait une matrice hermitienne. Formule de polarisation. Dégénérescence, vecteurs isotropes, positivité, définition, lien avec les matrices. nullstellensatz quadratique

### 2. Différentes réductions

#### 2.1 Réduction des formes quadratiques et hermitiennes

signature, sylvester, classes de congruence.

#### 2.2 Autour du théorème spectral

coréduction, concavité de  $\det^{1/n}$  (ou juste log concavité?) et sous-groupes de  $O_n(\mathbb{R})$ , inégalités de Weyl. Entrelacement? Attention,  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  est symétrique sans valeur propre réelle. Directions principales d'une quadrique (voir mon plan 157)?

### 3. Applications

Frobenius-Schur?

#### 3.1 Topologie d'espaces de matrices et décompositions

groupe unitaire, groupe orthogonal. QR, Polaire, racine carrée (elle est 1/2-holderienne) sont des difféos. application (de polaire?) tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contient une matrice orthogonale,  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{R})$  sont convexes. l'exponentielle entre  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et son image. ça marche aussi sur  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ . LU? Décomposition de Cholesky. ellipsoïde et sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$ . inégalité d'hadamard (D Serre)? Faire apparaître le lien entre polaire, racine carrée, et exponentielle sur les hermitiennes (ou symétriques).

#### 3.2 Calcul différentiel

Morse et applications (rouvière), extrémis, hessienne, folium. caractérisation de la convexité par la hessienne

#### 3.3 Résolution approchée d'équations

conditionnement, méthode de relaxation, méthode du gradient conjugué.

## Annexe

Une quadrique, une ellipsoïde, dessins autour de Morse (l'exemple du rouvière et le folium)

# 158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

peut-on diagonaliser sur  $\mathbb{C}$  les endos antisymétriques ? (pas orthogonalement évidemment !)

## 1. Espaces vectoriels euclidiens

### 1.1 Produit scalaire et orthogonalité

def du produit scalaire, norme associée, identité de polarisation. Dimension de l'orthogonal.

### 1.2 Morphismes d'espaces euclidiens

endos orthogonaux, ce sont les isométries fixant 0. Remarque : les similitudes c'est pareil : mq c'est isométrie composée avec une homothétie.

### 1.3 Dualité et adjonction

définition des endos (anti)symétriques  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^*)^\perp$ . Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

### 1.4 Point de vue matriciel

matrices de ces gens-là dans des bon. déterminants, trace, valeurs propres (mais pour les endos orthogonaux : jsp en fait, peut-être faut-il attendre la réduction. En fait on sait que  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(M^{-1})$  et comme elles commutent elles se stabilisent les espaces propres euh jsp). décomposition  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

## 2. Réduction des endomorphismes remarquables

### 2.1 Réduction des endomorphismes normaux

déf d'un endo normal, on remarque qu'ils sont tous normaux. Stabilisation du sous-espace orthogonal. orthogonaux, antisymétriques..

### 2.2 Autour du théorème spectral

forme linéaire associée, tous les  $u^*u$  sont autoadjoints de noyau  $\text{Ker}(u)$ , coréduction, dz de  $AB$  quand  $A$  et  $B$  sont symétriques. les vp extrémales sont sup et inf de  $\langle u(x), x \rangle$ , courant fischer et inégalités de Weyl, log cvx du déterminant, ellipsoïde.  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est convexe. L'exponentielle est un difféo (pour mq la réciproque est continue, je propose d'utiliser la DSE du log sur tout ouvert de  $\mathbb{R}_+^*$  (car il a une détermination complexe sur le plan privé de  $\mathbb{R}_-$ ), ça montre qu'il existe une série entière réciproque de exp, et on peut composer **REVOIR**) sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vers  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### 2.3 Racines carrées

La racine carrée est un homéo, la décomposition polaire est (donc) un homéo.

## 3. Groupes d'endomorphismes remarquables et géométrie

### 3.1 Projecteurs et symétries

projecteurs et symétries orthogonaux, retournements, réflexions. Application aux centres de  $O_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$ .

### 3.2 Topologie du groupe orthogonal

compacité, composantes connexes de  $O_n(\mathbb{R})$ , sous-variétés, Simplicité de  $SO_n(\mathbb{R})/Z(SO_n(\mathbb{R}))$  et application à des familles génératrices (rotations et retournements pour  $SO_n$ , réflexions pour  $O_n$ ). Application (de l'ellipsoïde, à dire à l'oral) sous-groupes compacts de  $\text{Mn}(\mathbb{R})$ .

### 3.3 Géométrie affine

les isométries  $f$  vérifient  $\text{Ker}(\vec{f} - id) \oplus^\perp \text{Im}(\vec{f} - id)$ . Projection sur un convexe. Les projecteurs orthogonaux minimisent la distance (ça se montre explicitement donc jsp). hahn-banach ? Enveloppe convexe du groupe orthogonal.

### 3.4 En petite dimension

description de  $O_2(\mathbb{R})$   $O_3(\mathbb{R})$ . le cube!! polytopes et faces. définition d'un angle. Expression du produit scalaire avec  $\cos(\theta)$ . voir III.4.1 III.4.3

## Annexe

dessins des éléments de  $O_2(\mathbb{R})$ ,  $O_3(\mathbb{R})$ , des retournements et réflexions dans  $\mathbb{R}^3$ . Ellipsoïde contenant un carré dans le plan (c'est le cercle), visualisation des valeurs propres d'un endosymétrique positif de  $\mathbb{R}^2$  sur une ellipse dans le plan

## 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

**Remarque :** Pour binôme de Newton, il suffit de réorganiser les sommes par paquets.

Lien avec le nombre d'anagrammes, lien avec le nombre de partitions. Attention, pour les partitions, on peut demander : "nb de partitions à k parts", ou "nombre de partitions dont les parts sont d'une taille donnée". C'est pas la même chose. La deuxième se décline en "nombre de partitions ordonnées à cardinaux des parts donnés" (coeff multinomial) et "nombre de partitions à cardinaux de parts donnés" (on multiplie par  $k!$  euh attends c'est un peu plus compliqué, il faut tenir compte du fait que y'a des parts de mêmes cardinaux donc comptées plusieurs fois. Pour le faire il faut déjà choisir une partition de l'entier  $n!$  ne pas en parler.)

Calculer un cardinal de deux façons différentes peut mener à la découverte d'une formule non triviale.

### 1. Cardinal d'un ensemble

#### 1.1 Cardinal d'un ensemble

notion d'ensemble fini, construction de la notion de cardinal. comparaison de cardinaux avec une injection, avec une surjection, preuve d'égalité d'ensembles. expression comme somme d'indicatrices. coefficient binomial, multinomial, binôme et multinôme de Newton : preuve combinatoire. (propriétés des indicatrices ?) (on définit les coefficients sans donner leur valeur, et les formules sont avec les coefficients). grassmann, théorie de la dimension ?

#### 1.2 Méthodes classiques de dénombrement

lemme du berger, application aux coeffs binom/multinom. nombre de permutations, nombre d'injections (aussi appelées Arrangements, facile à donner)/surjections, nombre de partitions (et déf des nb de Bell, formule de Doblinski) inclusion/exclusion. Relations de récurrence sur binom/multinom ?/nombre de partitions à k éléments. Triangle de Pascal et chemins dans un réseau binaire. Mots de Dyck, nombres de catalan (principe de symétrie).

#### 1.3 Séries génératrices

Nombres de Bell. Dés pour avoir uniforme sur  $[1, 12]$ . Arbres binaires stricts à n feuilles (prendre la série génératrice associée, voir que  $S^2 + X = S$ ).

### 2. Quelques applications

#### 2.1 Double comptages

Formule de Vandermonde (fleurs). Formule du comité-président (application : le frobenius est un morphisme!). Formule de Legendre ( $n!$ ). Somme des coefficients binomiaux : application : majoration de tchébycheff. Nombre moyen de diviseurs

#### 2.2 Autour du principe des tiroirs

principe des tiroirs fini, infini. Application à un truc concret discret (Sous-ensembles d'entiers de même somme, c'est rigolo). Application aux unions finies de sev sur un corps infini. Application sympathique : Théorème de Kronecker et sous-groupes de  $GL_n(\mathbb{Z})$ .

### 3. Corps finis

#### 3.1 Inversion de Moebius

Moebius,  $\varphi(n)$ , propriété par tri des éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , cyclicité (preuve combinatoire avec  $\varphi(n)$ ) des corps finis. dénombrement des irréductibles sur un corps fini, existence d'irréductibles de tout degré.

#### 3.2 Carrés de $\mathbb{F}_p$

combien de carrés, les formes quadratiques sont isotropes, réciprocity quadratique. Classification des formes quadratiques non dégénérées sur  $\mathbb{F}_q$ .

#### 3.3 Groupes linéaires

GL, SL, PGL, PSL. PGL<sub>2</sub> agit transitivement sur  $P^1(\mathbb{F}_q)$ , isos exceptionnels genre PGL<sub>2</sub>(F5) c'est S5, PGL<sub>2</sub>(F3) c'est S<sub>3</sub> et PSL c'est A<sub>3</sub>. Raréfaction des matrices inversibles (équivalent de leur nombre).

### 4. Combinatoire dans les groupes finis

#### 4.1 Actions de groupes

Lagrange. Formule de Burnside. Probab sur S<sub>n</sub> : variance du fixateur. Restaurants chinois. Cardinal du commutateur en fonction du type cyclique. Scindage en 2 des classes de conj dans A<sub>n</sub>. Colliers de perles.

#### 4.2 Propriétés induites par le cardinal

Théorèmes de Sylow. carrés de A4 et sous-groupe d'indice 2. groupes d'ordre 30. p-groupes et p-sous-groupes, résolubilité (burnside). Classification des groupes de petits ordres.

#### 4.3 Groupes de symétries en géométrie

colorations du cube, groupes d'isométries des polygones platoniciens (on les dénombre par orbite/stabilisateurs, et on les plonge dans le bon groupe symétrique)

## Annexe

le diagramme pour comprendre les fonctions. Triangle de Pascal et chemins dans un réseau binaire.

## 203 - Utilisation de la notion de compacité.

### 1. Compacité et fonctions continues

#### 1.1 Caractérisation de Borel-Lebesgue

#### 1.2 Application aux fonctions continues

lemme de la grenouille

dini, polynômes vers la valeur absolue

### 2. Compacité dans les evn de dimension finie

#### 2.1 Compacité en dimension finie

theoreme de la boule compacte de riesz

ellipsoide de john, sous-groupes compacts de  $O_n(\mathbb{R})$ .

la décomposition polaire est un homéo (extraire). Carathéodory, enveloppe convexe de  $O_n(\mathbb{R})$ .

#### 2.2 Dans la théorie des EDO

aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact)

hadamard levy

### 3. Approximation et espaces de fonctions

#### 3.1 Fonctions continues sur un compact

$C(X, E)$  où  $E$  algèbre de Banach est une algèbre de Banach, un idéal maximal c'est un  $J_s =$  "fonctions nulles en  $s$ ".

Les morphismes d'algèbre de  $C(X, \mathbb{R})$  sont donc les évaluations en  $s$ .

#### 3.2 Densité dans des espaces de fonctions

stone-weierstrass, muntz

continuité de la translation, densité des fonctions lisses à support compact

#### 3.3 Compacité dans un espace de fonctions

théorème d'ascoli, théorème de montel<sup>2</sup>

#### 3.4 Applications en analyse complexe

espace de bergman (bien mettre le coup des nombres). Théorème de Montel.

---

2. de toute suite bornée de fonctions holomorphes sur  $U$ , on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact, utiliser ascoli

## 206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

### 1. Espaces vectoriels normés de dimension finie

#### 1.1 Topologie

équivalence des normes. Théorème de Riesz

#### 1.2 Applications linéaires

continuité, norme d'opérateur

#### 1.3 Convexité

carathéodory. **continuité des applications convexes sur un convexe ouvert d'un evn en dimension finie**

### 2. Calcul différentiel

#### 2.1 Généralités

#### 2.2 Recherche d'extrema

par la hessienne, lemme de morse

#### 2.3 Optimisation

extrema liés, application à : théorème spectral, courant-fischer et weyl. inégalité d'hadamard, inégalité arithmético-géométrique.

#### 2.4 Changement de coordonnées dans des intégrales

formule des compléments (car cgt de variable), bergman (cgt polaire), ellipsoïde

### 3. Equations différentielles

#### 3.1 Structure des solutions

cauchy lipschitz, cauchy lipschitz linéaire, structure des solutions des EDL

#### 3.2 Stabilité des solutions

linéarisation, théorème de Liapounov

#### 3.3 Utilisation du flot

hadamard lévy

### 4. Structure préhilbertienne

#### 4.1 Projection dans un espace préhilbertien

projection vers un convexe complet, projection vers un sev de dimension finie.

#### 4.2 Distance à un sous-espace de dimension finie

Matrice de Gram, caractérisation de la densité (par la limite  $d(f, V_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ), théorème de Müntz.

polyn de meilleure approx, moindres carrés

lemme de grothendieck

## Annexe

## 209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

### 1. Approximations polynomiales

#### 1.1 Approximations locales

Taylor (young, lagrange, reste intégral), inégalité du sinus IV.0.2, théorème de division IV.0.1

#### 1.2 Approximations uniformes

Stone-Weierstrass application aux fonctions lipschitziennes (Hirsh-Lacombe), contre-ex sur  $\mathbb{U}$ , stone-weierstrass complexe et trigo, polynômes de Bernstein et vitesse de convergence [REF MANQUANTE](#), polynôme de meilleure approximation [REF MANQUANTE](#),

#### 1.3 Applications

Weierstrasse exponentiel et calcul de limites d'intégrales (tosel) [REF MANQUANTE](#), Théorème taubérien de Littlewood, séparabilité de  $C^0(X, \mathbb{R}^n)$ , Point fixe de Brouwer, théorème de Tietze IV.0.7, lemme des monômes IV.0.3

### 2. Approximation par convolution

#### 2.1 Approximation de l'unité

définition, constructions, préciser qu'il n'y a pas d'unité, on retrouve weierstrass et weierstrass trigo, on trouve 3 densités intéressantes [REF MANQUANTE](#) (voir plan 209)

#### 2.2 Applications

lemme de riemann lebesgue (fonctions intégrables),  $L^1_{loc}$  s'injecte dans le dual des fonctions test, Théorème de Rademacher IV.0.4

### 3. Le cas préhilbertien

#### 3.1 Bases hilbertiennes

projeté orthogonal, critère de densité, polynômes de Hermite, polynômes de Legendre de Tchébycheff [REF MANQUANTE](#)

#### 3.2 Applications

Transformée de Fourier (injectivité, Plancherel). Matrice de gram, déterminant de cauchy, Müntz. Espace de Bergman

### 4. Séries de Fourier

#### 4.1 Approximation en moyenne de cesaro

coefficients de fourier et noyaux (être rapide) et lien avec la convolution, Féjer (uniforme et  $L^p$ ),  $L^1_{2\pi} \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  est injective non surjective [POURQUOI REF MANQUANTE](#), et Banach- $G_\delta$ -Fourier IV.0.5

#### 4.2 Point de vue hilbertien

la base hilbertienne de fourier, égalité de parseval, convergence  $L^2$ .

#### 4.3 Approximations uniforme

condition suffisante ( $f$  continue et coefficients de fourier sommables), formule sommatoire de poisson, fonction theta, prolongement de  $\zeta$ , Shannon

#### 4.4 Approximation ponctuelle

théorème de Dirichlet, calcul de  $\zeta(2k)$ , phénomène de Gibbs

### Annexe

## 213 - Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

bonus : minimisation d'une fonctionnelle coercive (je crois que ça coûte de la cv faible...), lax-milgram ? espérance conditionnelle ? **Attention** : on ne regardera que des espaces séparables. Il est important de justifier l'apport de la complétude aux espaces préhilbertiens sans passer trop de temps sur ces derniers. Bien penser au cas sesquelinéaire. **Attention** : beaucoup de formules seront différentes (formule de polarisation, identité du parallélogramme). **Est-ce que Shannon ça ne serait pas mieux que Grothendieck ?**.

### 1. Espaces préhilbertiens

#### 1.1 Norme issue d'un produit scalaire

déf d'un produit scalaire, cauchy-schwarz, identité du parallélogramme **Attention** : cas complexe, elle est stricte, le pdt scalaire est continu

#### 1.2 Projection vers un convexe complet

projection sur un convexe complet **Attention** : cas complexe est-il différent ? lipschitz de la projection, Projection vers  $F$  sev complet, condition de densité,  $F^{\perp\perp} = F$ . Lemme de Maschke.

#### 1.3 Familles orthonormales

définition, expression du projeté ortho vers le Vect d'une telle famille. Gram-Schmidt. Bases hilbertiennes. Caractérisation des isométries **REVOIR**. Application : Matrices de Gram et Müntz. Inégalité de Bessel, égalité de Parseval.

### 2. Espaces de Hilbert

#### 2.1 Exemples capitaux

$L^2$  de n'importe quoi. Dont  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Lemme de Grothendieck.

#### 2.2 L'apport de la complétude

CVA d'une série. Si  $(a_n)$  est une famille de carré sommable et si  $e_n$  est orthonormale, alors  $\sum_n a_n e_n$  converge commutativement. Riesz (exemple : vecteur gradient), caractérisation des bases hilbertiennes ( $\text{Vect}(e_i)^\perp = 0$ )

#### 2.3 Construction de bases hilbertiennes

**REVOIR** la preuve. Au fond c'est juste  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Prolongement de formes linéaires continues. Bergman. Polynômes orthogonaux.

### 3. L'exemple des séries de Fourier

#### 3.1 Coefficients de Fourier

coefs, noyaux, convolution

#### 3.2 Convergences

au moins fêjèr, la conséquence  $L^2$ , et la CVS de dirichlet (faut-il autre chose ?)

#### 3.3 Applications

Poisson,  $\theta$ , calcul des  $\zeta(2k)$ .

### 4. La transformée de Fourier sur $L^2$

#### 4.1 Définition et extension à $L^2$

déf, inversion, plancherel donc on a une belle similitude de  $L^2$ .

#### 4.2 Applications

l'intégrale de Dirichlet par la fonction porte. On a une formule CVU explicite pour Shannon. Puis, l'échantillonnage de Shannon est une isométrie, les sinus cardinaux translatés donnent une base hilberteienne de  $BL^2$ .

### Annexe

projection sur un convexe fermé, sur un sev fermé. Fonction porte et sinus cardinal. « une belle utilisation de la

complétude, qu'on ne passera pas sous silence »

## 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

application : le TIL holomorphe (supposer que  $f'$  est continue. utiliser cauchy riemann pour vérifier l'holo de l'inverse)

### 1. Inversion locale et fonctions implicites

#### 1.1 Le théorème d'inversion locale

déf d'un difféo, expression de la diff de la dérivée. Les intervalles ouverts sont difféomorphes. Lemme topologique (Banach-Picard à paramètre) TIL! exemple  $((x^2 - y^2, 2xy)$ , c'est la multiplication complexe lol) d'un difféo local. Exemple du difféo local du changement de coordonnées polaires. La fonction  $x + x^2 \sin(\pi/x)$  est dérivable de dérivée 1 (en 0) mais la fonction n'est pas inversible (elle n'est jamais monotone au voisinage de 0, le voir avec sa dérivée. D'où l'importance du caractère  $C^1$ .)

Un corollaire : la base incomplète  $C^1$  : on peut compléter une famille  $f_1, \dots, f_p$  de fonctions réelles dont les diffs sont des formes linéaires indépendantes en  $x_0$  en une famille  $f_1, \dots, f_n$  qui réalise un difféo local (notion de changement de coordonnées). **REVOIR**.

#### 1.2 Vers les difféomorphismes globaux

un difféo local est une application ouverte. Inversion globale. Nécessité de l'hypothèse d'injectivité (le difféo n'est pas forcément injectif). Ne pas oublier Hadamard-Lévy!

#### 1.3 Le théorème de la fonction implicite

le folium : paramétrisation locale. continuité des racines d'un polynôme

### 2. Généralisation aux sous-variétés

#### 2.1 Immersions, submersions

les modèles locaux. On oubliera peut-être le thm du rang constant mais pas grave.

#### 2.2 Sous-variétés

il semble possible de ne donner que la définition par cartes et la définition par submersions. Je sais faire la définition par graphes mais jsp à quoi elle sert, et je crois m'en fiche de la définition par immersions. Espace tangent : donner l'expression par cartes, et par submersions.  $SO_n(\mathbb{R})$  est une sous-variété, espace tangent, dimension.

#### 2.3 Théorème d'inversion locale dans une sous-variété

Définir les applications différentiables. énoncé.  $SO_n(\mathbb{R})$  est simple.

### 3. Applications en analyse et en géométrie

#### 3.1 Application à la recherche d'extrema

Extrema liés. Application : thm spectral, inég d'hadamard. Lemme de Morse. Application : le folium : redressement de la croix.

#### 3.2 Géométrie dans des espaces de matrices

Simplicité de  $SO_n(\mathbb{R})$ . (l'exponentielle sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un difféo. racine d'une matrice symétrie définie positive et donc décomposition polaire?) QR est un difféo.

exp est un difféo local en  $I_n$ , sous-groupes à 1 paramètre **REVOIR**. Racine  $k$ -ième locale. Sous-groupes arbitrairement petits **REVOIR**

### Annexe

dessin pour le TIL, dessin pour la fonction implicite. dessin d'une sous-variété, espace tangent. Espace tangent de la sphère. Folium.

## 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.

La norme d'opérateur sera mise naturellement sur les espaces d'endomorphismes.

### 1. Différentiabilité

#### 1.1 Définition et techniques de calcul

Déf de la différentielle. Exemple : les fonctions holomorphes sont les fonctions diff dont la diff est une similitude directe. linéarité, règle de la chaîne. différentielle d'une AL, différentielle d'un truc  $n$ -linéaire, différentielle de la puissance  $n$ -ième de matrices, diff du det. Dérivées directionnelles, lien avec la diff. Dérivées partielles selon une base. Non différentiabilité de la norme en 0. Un exemple dérivable selon toute direction mais pas diff ( $y^2/x$  si  $x \neq 0$  et  $y$  sinon. Elle n'est même pas continue en 0). Vecteur gradient, interprétation. Matrice jacobienne. IAF. Caractérisation des constantes (peut découler de l'IAF). Théorème de la limite de la dérivée ("prolongement  $C^1$ ")??

#### 1.2 Différentielles d'ordre supérieur

Def de la diff  $k$ -ième. Hessienne, théorème de Schwarz. si y'a des dérivées partielles régulières, alors on est régulier. Taylor-Young. ITL, Taylor reste intégral. Différentielle d'une limite (si les fonctions CVS et si les diff convergent uniformément vers une AL, alors la limite est différentiable et on connaît sa diff. La classe  $C^1$  est conservée), l'exponentielle est lisse **REVOIR**.

### 2. Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite

#### 2.1 Le théorème d'inversion locale

déf d'un difféo, expression de la diff de la dérivée. Les intervalles ouverts sont difféomorphes. Lemme topologique (Banach-Picard à paramètre) TIL! exemple  $((x^2 - y^2, 2xy)$ , c'est la multiplication complexe lol) d'un difféo local. Exemple du difféo local du changement de coordonnées polaires. La fonction  $x + x^2 \sin(\pi/x)$  est dérivable de dérivée 1 (en 0) mais la fonction n'est pas inversible (elle n'est jamais monotone au voisinage de 0, le voir avec sa dérivée. D'où l'importance du caractère  $C^1$ .)

Un corollaire : la base incomplète  $C^1$  : on peut compléter une famille  $f_1, \dots, f_p$  de fonctions réelles dont les diffs sont des formes linéaires indépendantes en  $x_0$  en une famille  $f_1, \dots, f_n$  qui réalise un difféo local (notion de changement de coordonnées). **REVOIR**.

#### 2.2 Vers les difféomorphismes globaux

un difféo local est une application ouverte. Inversion globale. Nécessité de l'hypothèse d'injectivité (le difféo n'est pas forcément injectif). Ne pas oublier Hadamard-Lévy!

#### 2.3 Le théorème de la fonction implicite

le folium : paramétrisation locale. continuité des racines d'un polynôme

### 3. Sous-variétés

**Attention à dire que c'est une application de la théorie et non des exemples d'applications différentiables sur un ouvert.** car ça va parler d'applications différentiables pas forcément sur un ouvert  $\mathbb{R}^n$ .

#### 3.1 Immersions, submersions

les modèles locaux. On oubliera peut-être le thm du rang constant mais pas grave.

#### 3.2 Sous-variétés

il semble possible de ne donner que la définition par cartes et la définition par submersions. Je sais faire la définition par graphes mais jsp à quoi elle sert, et je crois m'en fiche de la définition par immersions. Espace tangent : donner l'expression par cartes, et par submersions.  $SO_n(\mathbb{R})$  est une sous-variété, espace tangent, dimension.

#### 3.3 Théorème d'inversion locale dans une sous-variété

Définir les applications différentiables. énoncé.  $SO_n(\mathbb{R})$  est simple.

### 4. Applications

#### 4.1 Extrema et convexité

Condition sur la hessienne pour qu'un pt critique soit extrema. Morse! Caractérisation des fonctions convexes par la hessienne. BMP : fonctionnelles convexes (un min local est global)

#### 4.2 Changement de coordonnées dans des intégrales

application : cgt de variable, ellipsoïde?

## 218 - Formules de Taylor. Exemples et applications.

### 1. Comportement local : développements limités

#### 1.1 Formules de Taylor

Définir rapidement  $o$  et  $O$ . Existence d'un DL (Taylor-Young), égalité de Taylor-Lagrange, inégalité de TL, Taylor avec reste intégral. IAF en dimension qqc (gourdon) et ITL. Dérivation et intégration d'un DL. Applications : calculs de DL usuels.

remarque :  $e^{it}$  ne vérifie pas le théorème de Rolle donc on voit que l'égalité de Taylor-Lagrange ne marche que pour les fonctions réelles.

#### 1.2 Quelques applications

Application : théorème de division  $C^\infty$ . **REVOIR**. Lien DL ordre 1 et dérivée, et contre-exemple DL ordre 2 mais pas deux fois dérivable **REVOIR**.

Inégalité de Kolmogorov pour les fonctions ? (FGN?) **REVOIR**

Cas des polynômes!!!!!! d'Alembert-gauss

des inégalités, des calculs de limites ( $\exp(x) = (1 + x/n)^n \dots$ )...

DL de la composée, application à la surjectivité de l'exponentielle de matrices.

### 2. Comportement global : lien avec les séries entières

#### 2.1 Développement en série entière

Rayon de convergence. Lien avec les séries entières : une série entière a un DL tout cuit, et des dérivées successives pas trop grosses aboutissent à un DSE par ITL.

DSE  $\Rightarrow$  DL. Un exercice sur taylor-lagrange (=théorème de Bernstein, gourdon)<sup>3</sup>

#### 2.2 Analyse des séries entières

Zéros isolés, unicité du prolongement.

formules intégrales de Cauchy : encore le théorème de d'Alembert-Gauss.

#### 2.3 Résultats de régularité

théorèmes abélien/taubérien

### 3. Utilisation en analyse asymptotique

#### 3.1 Quelques développements asymptotiques

Sturm et asymptotique

méthode de Laplace (fonctions  $\Gamma$  et gaussienne?)

#### 3.2 Estimation de suites numériques

Point fixe de Banach-Picard et fonctions itérées dont la différentielle en 0 est de norme  $< 1$ . log itérés, sin itérés, arctan itérés

### 4. Applications

#### 4.1 Étude d'extrema

extension de Taylor avec reste intégral en dimension supérieure caractérisation par la diff seconde, Morse

#### 4.2 Méthodes numériques

méthode de Newton **REVOIR REF MANQUANTE**

erreur dans le schéma d'Euler explicite

#### 4.3 Stabilité dans des équations différentielles

méthode de linéarisation, stabilité de Liapounov

#### 4.4 En probabilités

fonction génératrice, existence de la dérivée

fonction caractéristique, dérivées, TCL (Lévy pas mentionné)

3. si les dérivées successives sont positives (sur l'intervalle (borné) de définition), la fonction est une série entière (écrire TL avec reste intégral en le point regardé, puis un peu plus loin, puis se servir du reste de la seconde pour contrôler le reste de la première)

## 219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

### 1. Notion d'extrema

#### 1.1 Notion de maximum et de borne supérieure

déf du maximum, caract de la borne sup, un sup atteint est un max

#### 1.2 Lien avec la compacité

image d'un compact par une application continue, existence d'un max/min.

### 2. En analyse réelle, en analyse complexe

#### 2.1 En analyse réelle

CN par la dérivée nulle (un exemple réel ?), Rolle, corollaire : Taylor-Lagrange. Application : Young et Hölder.

#### 2.2 En analyse complexe

principe du maximum holomorphe (si  $|f|$  admet un max local dans un ouvert connexe, alors  $f$  est constante. Pour le voir, utiliser la formule de la moyenne de  $e^{\theta x} f$  pour que le max soit réel, et prendre la partie réelle. Au passage : c'est vrai pour  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$ .), application : d'Alembert-gauss. ! distance d'un fermé à un compact : application à un bout de Bergman

### 3. En calcul différentiel

#### 3.1 Points critiques

points critiques, rôle généralisé (on suppose  $f$  constante sur la sphère). attention ça marche pas si  $f$  pas définie sur un ouvert, et point critique pas forcément extrémal ( $x^3$ )

méthode de Newton

#### 3.2 Etude locale des points critiques

caractérisation par la hessienne (minimum  $\Rightarrow$  hessienne positive), réciproque fautive, points selles (exemple ?). Lemme de Morse!

#### 3.3 Espace tangent et extréma liés

espace tangent, extréma liés Applications : théorème spectral (et là on met Courant-Fischer et Weyl!!), inégalité d'Hadarnard, **inégalité arithmético-géométrique** (étudier le max de la fonction produit sur l'hyperplan  $\sum_i x_i = s$ , c'est

$\left(\frac{s}{n}\right)^n$ )

### 4. Utilisation de la notion de convexité

#### 4.1 Ensembles convexes

la distance à un fermé convexe est atteinte, projection sur un convexe

enveloppe convexe du groupe orthogonal!

hyperplans d'appui

points extrémaux : ce sont les points où des formes linéaires atteignent leur max sur  $K^{**}$  (**théorème de Choquet**)

polynômes de meilleure approximation  $L^2$ , moindres carrés

#### 4.2 Fonctions convexes

**BMP** sur les fonctionnelles convexes

ellipsoïde de John (dev)

## 220 - Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

des exemples!

lotka voltera?

LES SOLUTIONS D'EDL SONT GLOBALES

FORMULE DE DUHAMEL

### 1. Les équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}$

#### 1.1 Méthode de variation de la constante

#### 1.2 Problèmes de recollement

### 2. La théorie de Cauchy-Lipschitz

#### 2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

fonctions localement lipschitziennes par rapport à la seconde variable, cylindres de sécurité, complétude, cauchy-lipschitz. Portrait de phase = partition de  $\mathbb{R}^n$  en orbites. L'unicité donne une condition suffisante de périodicité.

#### 2.2 Régularité des solutions

lemme des bouts, lemme de Gronwall, continuité du flot.

Application : Hadamard Lévy.

#### 2.3 Retour aux équations différentielles linéaires

cauchy lipschitz linéaire

exponentielle de matrices

se ramener à du degré 1 par les matrices

matrice fondamentale d'un système (les colonnes sont une base de solutions) wronskien

Application : Comparaison de Sturm. (en remarque : une telle solution existe toujours grâce à Cauchy Lipschitz linéaire)

### 3. Etude qualitative des EDO

#### 3.1 Etude de la stabilité

Définition de la stabilité. Caractérisation de la stabilité par la matrice fondamentale pour une équation linéaire.  $e^{tA}$  tend vers 0 ssi les valeurs propres sont de  $\text{Re} < 0$  ou les  $\text{Re} = 0$  sont dans des blocs de Jordan dz. Linéarisation : Liapounov.

#### 3.2 Portraits de phase en ordre 2

étude locale pour connaître les points fixes stables et non stables, regarder les zéros des dérivées partielles pour savoir où ça croît, où ça décroît. Classification des portraits de phase en dimension 2 (selon la réduction de la jacobienne). pendule

### Annexe

portraits de phase, lemme des bouts

## 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

### 1. Equations différentielles linéaires

#### 1.1 Définition et premières propriétés

Définition équation différentielle linéaire + écriture matricielle pour se ramener au degré 1

#### 1.2 Structure des solutions

Cauchy-lipschitz linéaire. Les solutions des  $y' = A(t)y + B(t)$  sont globales. Donc on a la structure des solutions. Réécriture avec des équations différentielles à valeurs réelles de degré  $n$ . Structure affine des solutions.

Application : Comparaison de Sturm (une telle solution existe par Cauchy-Lipschitz linéaire) exponentielle de matrices

**Usage du Lemme des noyaux**

matrice fondamentale d'un système (les colonnes sont une base de solutions)

#### 1.3 Wronskien

**ALERTE ICI** Définition + expression dans le cas à  $p$  solutions. Invariance du rang d'une famille de solutions par rapport à  $t$ . CNS sur le wronskien pour avoir une base de solutions (Gourdon)

### 2. Méthodes de résolution explicite

#### 2.1 Recherche de solutions particulières, cas à coefficients constants

FORMULE DE DUHAMEL, exemples (chercher du polynôme quand c'est polynôme, etc)

Polynôme caractéristique de l'équation

Cas particulier : coefficients constants à  $n = 1$  et  $n = 2$ .

#### 2.2 Méthode de variation de la constante

**est-ce** spécifique à  $\mathbb{R}$  ?

#### 2.3 Problèmes de recollement

INTERET DE LA REDUCTION DES ENDOS

### 3. Application : étude qualitative des EDO

#### 3.1 Etude de la stabilité

Définition de la stabilité. Caractérisation de la stabilité par la matrice fondamentale pour une équation linéaire.  $e^{tA}$  tend vers 0 ssi les valeurs propres sont de  $\operatorname{Re} < 0$  ou les  $\operatorname{Re} = 0$  sont dans des blocs de Jordan de dimension 1. Linéarisation : Liapounov.

#### 3.2 Portraits de phase en ordre 2

étude locale pour connaître les points fixes stables et non stables, regarder les zéros des dérivées partielles pour savoir où ça croît, où ça décroît. Classification des portraits de phase en dimension 2 (selon la réduction de la jacobienne). pendule

### Annexe

portraits de phase

## 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Cette leçon est limitée aux suites réelles ou complexes. L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'épsilons superflus) sont des thèmes centraux.

équipartition et critère de Weyl?

master theorem ?

**STIRLING et WALLIS** (voir wikipedia Intégrale de Wallis) on sait que l'intégrale de wallis converge par décroissance et minoration (bon ok ça converge vers 0)

### 1. Notion de convergence

#### 1.1 Convergence et limites

Bolzano-Weierstrass

#### 1.2 Valeurs d'adhérence

#### 1.3 Cas des suites réelles

gendarmes

suites adjacentes, moyenne arithmético géométrique

limsup liminf, carac de la CV, exemple de  $\lim \|M\|_{op}^n = \inf \|M\|_{op}^n$ . Possible application : fatou, convergence monotone, convergence dominée.

### 2. Etude de cas divergents et procédés de sommation

#### 2.1 Sommation de relation de comparaison

comparaison série-intégrale? Critère de convergence des séries de Bertrand. nombre harmonique à  $o(1/n)$  près. Application :  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  tend vers  $\gamma$  en 1.

#### 2.2 Procédés de sommation

**REF MANQUANTE** pour les procédés de sommations. procédés de sommation des séries divergentes, abélien et taubérien, mais il y a aussi Cesaro.

### 3. Exemples d'études de suites

#### 3.1 Etude asymptotique des suites

thm des nombres premiers (la conséquence : équivalent des  $p_n$ ). dev chloé sur Sturm

#### 3.2 Suites récurrentes

trouvent des points fixes. Grenouille. Galton-Watson. développement asymptotique de suite récurrente (log itérés, sinus itérés)

#### 3.3 Le cas des suites récurrentes linéaires

suites récurrentes d'ordre  $n$ , calcul. Fibonacci.

#### 3.4 Application en calcul numérique

méthode de Héron, méthode de Newton

### Annexe

suites récurrentes : dessins. Méthode de Newton

## 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

El Amrani, Gourdon, Rombaldi, Faraut

méthode de newton, stirling

ssi les coefficients de fourier sont à décroissance rapide, alors  $f$  est  $C^\infty$ .

### 1. Comparaison de suites et de fonctions

#### 1.1 Relations de comparaisons

#### 1.2 Développement limités

#### 1.3 Développements asymptotiques

échelles de comparaison

### 2. Exemples de développements asymptotiques de suites

#### 2.1 Séries numériques

comparaison série intégrale (**L'énoncé est le suivant** : si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est décroissante et cpm, alors la série

$\sum_n \int_{n-1}^n f - f(n)$  converge!), critère de Bertrand. Somme des relations de comparaison, cesaro, DA du nombre harmonique

#### 2.2 Suites récurrentes

méthode "puissance  $\alpha$ ", applications de partout : arctan (un équivalent), sinus itérés (à l'ordre 2), log itérés DEV (à l'ordre 3!),

#### 2.3 Suites définies de manière implicite

en trouver ? à part, évidemment, l'incontournable : Théorème de comparaison de Sturm!

### 3. Exemples de développements asymptotiques de fonctions

#### 3.1 Fonctions définies par une intégrale

intégration des relations de comparaison, pleins d'exemples, et notamment la fonction  $\Gamma$  : par sa relation de récurrence, on a  $\Gamma(x) \sim 1/x$  en 0. **Méthode de Laplace**, application à Stirling!!!

#### 3.2 Fonctions définies par une série

continuité et limite d'une série de fonctions qui CVU,  $\zeta$  en 1,  $\zeta$  en  $+\infty$ ,

### 4. Applications

#### 4.1 Le théorème des nombres premiers

#### 4.2 Le TCL

### Annexe

plein plein de DL, fonction et domaine utilisés pour newman's tauberian

## 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

### 1. Etude générale des suites récurrentes

#### 1.1 Monotonie et comparaisons

#### 1.2 Points fixes et orbites

Lemme de la Grenouille, banach picard, points fixes attractifs en dimension supérieure, Orbite de suites : Théorème de Sarkowski IV.0.6,  $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$  **REVOIR** Francinou, Gianella (Analyse 1)!

#### 1.3 Calcul exact et estimation

Suites récurrentes d'ordre supérieur, exemple avec fibonacci. Suites arithmético-géométriques (et autres systèmes récurrents genre  $u_{n+k} =$  combinaison linéaire des  $u_{n+l}$ .) (analogie discret-continu) Suite des sinus itérés, DVPT Dev asymptotique d'une suite récurrente.

### 2. Calculs numériques approchés

#### 2.1 Equations réelles

ordre d'une méthode, méthode de newton, cas particulier : héron. méthode de la sécante : d'ordre  $\varphi$ , méthode QR et application aux polynômes

#### 2.2 Systèmes d'équations linéaires

méthodes itératives les trucs chiant quoi, théorème de householder, méthode du gradient conjugué

#### 2.3 Extrema

gradient à pas fixe

### 3. Applications

#### 3.1 En géométrie

convergence de polygones

#### 3.2 En analyse

Applications (de banach-picard) équa diff avec retard, cauchy-lipshchitz

#### 3.3 En probabilités

Markov/perron frobenius, Galton-Watson

### Annexe

Dessin de la suite des sinus itérés, celle de mon développement, dessin de la méthode de Newton, l'arctangente et newton ne marche pas, une fonction non itérable, cv rapide vers le point fixe (une fonction contractante :  $\ln(x+1)+2$ ), croissance rapide car  $f - \text{id} > 0$ , une fonction décroissante où on voit bien que ça tournicote (si la dérivée est environ  $-1$  ça marche)

## 228 - Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

**Motivation** : calcul d'extréma, monotonie, approximations

### 1. De l'importance de la régularité

#### 1.1 La continuité

caractérisations de la continuité, image d'un intervalle, d'un compact. Heine. Prolongement par continuité : définition du sinus cardinal. lemme de la grenouille

#### 1.2 La dérivabilité

définition,  $x^2 \sin(1/x)$  de dérivée bien définie mais non continue. Rolle, TAF, IAF. Théorème de la limite de la dérivée. Lipschitzianité, la racine est 1/2-hölderienne. l'escalier du diable, on en déduit que les fonctions continues dérivables nulle part sont denses (squeeze l'escalier en le multipliant par  $\varepsilon$  et l'ajouter à n'importe quelle fonction continue)

DL, log itérés sturm

#### 1.3 Dérivées d'ordre supérieur

définition, Théorème fondamental de l'analyse (importance de la  $C^1$ ). Formules de Taylor. Théorème de Bernstein (dérivées positives implique DSE)

#### 1.4 Approximation par des fonctions régulières

Convolution, Construction d'une fonction  $C^\infty$  non DSE. Densité des fonction test.

dini et polynômes pour la valeur absolue donnant stone weierstrass

et müntz aussi

### 2. Régularité d'une limite ou d'une somme

#### 2.1 Régularité sur les suites de fonctions

théorème de la limite simple de baire

#### 2.2 Application aux séries de fonctions

convergence normale

#### 2.3 Intégrales à paramètres

intégrale de dirichlet par laplace!

### 3. Exemples dans l'analyse de Fourier

#### 3.1 Application aux séries de Fourier

féjer.

caractérisation des fonctions régulières par la décroissance des coefficients de fourier.

Théorème de Dirichlet. Formule sommatoire de Poisson, équation fonctionnelle sur  $\theta$ . Définition des nombres de Bernouilli par prolongement par continuité de  $z/(e^z - 1)$ . Calcul des  $\zeta(2k)$ .

banach steinhaus et séries de fourier divergeant sur un dense

#### 3.2 Transformée de Fourier

espace de Schwarz! échantillonnage de Shannon. Application : TCL.

### 4. Applications en probabilités

probab : théorème de lévy (et prequels) application TCL

fonction génératrice, dérivabilités et galton watson

### Annexe

l'escalier du diable

## 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

dini 2

### 1. Fonctions monotones

#### 1.1 Généralités

théorème de l'homéomorphisme (pour les fonctions strictement monotones)

#### 1.2 Régularité des fonctions monotones

croissante  $\Leftrightarrow f' \geq 0$ . nb dénombrable de discontinuités

monotone + l'image est un intervalle  $\Rightarrow$  continu.

#### 1.3 Applications

monotonie des suites récurrentes, itérer la fonction  $f(x) = 1 - x^2$  fait converger vers le nombre  $\varphi'$ .

Somparaison série-intégrale, application : critère de Bertrand.

fonctions de répartition (cadlag), mesure de stieltjes,

### 2. Fonctions convexes

#### 2.1 Caractérisations et généralités

Un sup de formes linéaires est convexe. donc  $\det^{1/n}$  est concave.

#### 2.2 Cas de la dimension 1

inégalité des pentes. convexité  $\Rightarrow$  dérivable presque-partout. Une conséquence de Darboux : une fonction dérivable et convexe est  $C^1$ . log-convexité. Théorème de Bohr-Mollerup. Galton-Watson.

#### 2.3 Inégalités de convexité

IAG, exponentielle, logarithme, jensen, Young, Hölder, Minkovski,

#### 2.4 Optimisation de fonctions convexes

**BMP** sur les fonctionnelles convexes

ellipsoïde de john (dev)

## 235 - Problèmes d'interversion de symboles en analyse

### 1. Propriétés conservées par la convergence de suites de fonctions

#### 1.1 Convergence simple

conservation de la convexité, de la lipschitzianité, de la croissance, mais pas de la continuité, mais pas des intégrales. Limite simple de Baire?

#### 1.2 Convergence uniforme

conservation de la continuité, de l'intégration sur un compact, limites. Pas de composition! Limite des intégrales de Wallis (0). L'intégrale de  $x^x$  (el amrani).

#### 1.3 De la convergence simple à la convergence uniforme

Une limite de fonctions  $k$ -lipschitziennes sur un compact est uniforme. Théorèmes de Dini (gourdon), polynômes pour la valeur absolue qui impliquent Stone-Weierstrass (hirsh lacombe), donc la CVU ne conserve pas la dérivée. Théorème d'Egoroff (attention, c'est sur un ensemble de mesure finie).

#### 1.4 Régularité des séries

convergence normale, interversion somme et intégrale en cas CVU sur un compact. Théorèmes taubérien et abélien.

### 2. L'exemple de la théorie de l'intégration

#### 2.1 Limites d'intégrales

Beppo Levi, lemme de Fatou, CVD

application : l'intégrale de Gauss en disant  $\exp(x) = \lim(1 - x/n)^n$  (tronquer l'intégrale : CVD)

"Convergence normale  $L^1$ " implique la convergence pp.

une réciproque : lemme de Scheffé

#### 2.2 Intégrales à paramètre

continuité, dérivation, calcul de la TF de la gaussienne, DEVELOPPEMENT intégrale de Dirichlet. Analyticité de la transformée de Laplace d'une fonction localement intégrable et bornée, théorème taubérien de Newman. L'exemple de la fonction gamma.

#### 2.3 Théorèmes de Fubini

énoncés. application : calcul des  $\zeta(2k)$ . Applications (on passe sous silence la formule de changement de variable) : intégrale de Gauss, formule des compléments, Bergman

### 3. Convolution et transformée de Fourier

#### 3.1 Le produit de convolution

densité.

#### 3.2 La transformée de Fourier-Plancherel

théorème. Application : étude de  $BL^2$ . Application : Lévy+TCL.

### 4. Application : le théorème des nombres premiers

(Newman déjà mis précédemment), là on fait tous les calculs autour de  $\psi(z)$ , le prolongement de  $\zeta...$

## 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

éviter les fonctions  $C^0pm$  si possible : faire du lebesgue! **Motivation** calcul d'aires, calcul de primitives

### 1. Techniques directes

#### 1.1 En dimension 1

thm fondamental de l'analyse, exemples (arctangente, des trucs). Méthode de primitivation des fractions rationnelles. IPP,  $\int_{1/\alpha}^1 x^2 \ln(x) dx = \frac{13 - 6\alpha - \alpha^3}{9\alpha^3}$  (baccalauréat 2024), intégrales de Wallis, règles de Bioche.

#### 1.2 En dimension supérieure

Fubini. Changement de coordonnées. Coordonnées polaires. Intégrale de Gauss. Exemple autour de Bergman!! Intégrale de  $e^{-qM}$  où  $M$  est symétrique positive définie et  $qM(X) = \langle X, MX \rangle$ .

### 2. Techniques indirectes

#### 2.1 Utilisation des intégrales à paramètres

définition, dérivation sous l'intégrale, construction de  $\Gamma$ . Application : TF de la Gaussienne (sans l'appeler TF)

#### 2.2 Utilisation du théorème des résidus

je veux formule des compléments

#### 2.3 Utilisation de la transformée de Laplace

On note  $E = L^1_{loc} \cap B(\mathbb{R}^+)$  l'ensemble des fonctions bornées et localement intégrables. Injectivité de la TL (pour des fonctions continues). Peut-on inverser TL sur des espaces gentils? Théorème abélien (si une fonction est intégrable alors  $L$  est prolongeable continument en 0 et  $L(0) =$  son intégrale **REVOIR**il faut le faire! Il me semble assez trivial si on définit aussi la TL sur  $L^1$ ). Application à l'intégrale de Dirichlet. Définir fonctions holomorphes sur un voisinage de  $\text{Re} \geq 0$ . Théorème taubérien de Newman.

#### 2.4 Application : le théorème des nombres premiers

introduire  $\pi, \theta, \psi, \zeta$ , donner la prolongeabilité de  $\psi$ , donner que l'intégrale de Newman converge, et donner le théorème des nombres premiers. **DONNER LA VALEUR DE L'INTEGRALE DE NEWMAN!** (je crois que c'est

$$\gamma - 1 + \sum_p \frac{\log(p)}{p(p-1)}.$$

### 3. Utilisation de la transformée de Fourier

#### 3.1 Régularité

Briane-Pagès. définition, exemple de la gaussienne et de la porte.

#### 3.2 Inversion

Formule d'inversion (peut-être donner l'approximation de l'unité utilisée). Injectivité de la TF, non existence d'un neutre pour  $*$ . Si  $f$  et  $\hat{f}$  sont intégrables alors  $f$  est pp égale à une fonction continue. Corollaire : le sinus cardinal n'est pas intégrable! Fourier-Plancherel et calcul de l'intégrale de Dirichlet. Shannon!

#### 3.3 Fonctions caractéristiques en probabilité

(ouvrard 2) Définition, cas où c'est à densité, cas d'une loi normale centrée réduite,  $\varphi_X$  est uniformément bornée par 1, elle caractérise la loi de  $X$ .  $\varphi$  de la loi jointe c'est le produit (lien avec la convolution). Lévy, TCL.

### 4. Calculs numériques d'intégrales

#### 4.1 Somme de Riemann et méthode des rectangles

pourquoi ça converge?

#### 4.2 La méthode de Monte-Carlo

ça vient de la loi des grands nombres

### Annexe

tracer le sinc, les approximations de l'unité. Chemins utilisés (formule des compléments, théorème taubérien de Newman) monte carlo, méthode des rectangles primitives usuelles

## 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

### 1. Etude des intégrales à paramètres

#### 1.1 Régularité

Briane-Pagès important. Commencer par la CVD. Puis continuité sous le signe intégrale. Application : continuité de l'intégrale en fonction des bornes IV.1.1. Contre-exemple (hauchecorne?) :  $f(u, x) = ue^{-ux}$ , sur  $\mathbb{R}^+$  : l'intégrale n'est pas continue en 0! Corollaire : TFA. Dérivation sous l'intégrale. Holomorphie sous l'intégrale. Fonction  $\Gamma$ .

Complément sympa : théorème de division  $C^\infty$  (nécessite Taylor puis d'étudier le reste intégral). Et théorème de la limite de la dérivée **REVOIR**

#### 1.2 Comportement asymptotique

intégration des relations de comparaison. Méthode de Laplace (gourdonner **REVOIR**). Application à la gaussienne en fonction de son paramètre, et puis à  $\gamma$ . On a gagné Stirling.

### 2. Autour de la transformée de Laplace

#### 2.1 La transformée de Laplace d'une fonction bornée

On note  $E = L^1_{loc} \cap B(\mathbb{R}^+)$  l'ensemble des fonctions bornées et localement intégrables. Injectivité de la TL (pour des fonctions continues). Peut-on inverser TL sur des espaces gentils? Théorème abélien (si une fonction est intégrable alors  $L$  est prolongeable continument en 0 et  $L(0) =$  son intégrale **REVOIR**il faut le faire! Il me semble assez trivial si on définit aussi la TL sur  $L^1$ ). Application à l'intégrale de Dirichlet. Définir fonctions holomorphes sur un voisinage de  $\text{Re} \geq 0$ . Théorème taubérien de Newman.

#### 2.2 Application : le théorème des nombres premiers

introduire  $\pi, \theta, \psi, \zeta$ , donner la prolongeabilité de  $\psi$ , donner que l'intégrale de Newman converge, et donner le théorème des nombres premiers.

### 3. Le produit de convolution

voir BMC

#### 3.1 Définitions et approximations

définition générale : "quand l'intégrale a un sens". Si défini, alors  $f * g = g * f$ . Si  $L^1$ , alors on est dans  $L^1$ . Si  $L^p$  et  $L^q$ , alors c'est  $L^1$  et c'est uc! application : si  $A$  et  $B$  sont de mesure non nulle, alors  $A + B$  est d'intérieur non vide. Approximation de l'unité. La convolée avec une approx de l'unité CVU STC quand  $f$  est  $C^0$  bornée. Elle CV  $L^p$  quand  $f \in L^p$ .

#### 3.2 Application : régularisation

Si  $f \in L^1$  et  $g$  bornée de classe  $C^1$ . Alors  $f * g$  est dérivable de dérivée  $f * g'$ . Donc les fonctions test sont denses dans  $L^p$  pour  $p < \infty$ . Autre application : Féjer donc Weierstrass trigo.

### 4. L'exemple de la transformée de Fourier

#### 4.1 Régularité

Briane-Pagès. définition exemple de la gaussienne et de la porte. Effet avec la dérivation, avec la convolution. ça tend vers 0 vite si  $f$  est régulière.

#### 4.2 Inversion

Formule d'inversion (peut-être donner l'approximation de l'unité utilisée). Injectivité de la TF, non existence d'un neutre pour  $*$ . Si  $f$  et  $\widehat{f}$  sont intégrables alors  $f$  est pp égale à une fonction continue. Corollaire : le sinus cardinal n'est pas intégrable! Fourier-Plancherel. Principe d'incertitude d'heisenberg? Shannon!

#### 4.3 Fonctions caractéristiques en probabilité

(ouvrard 2) Définition, cas où c'est à densité, cas d'une loi normale,  $\varphi_X$  est uniformément bornée par 1, elle caractérise la loi de  $X$ .  $\varphi$  de la loi jointe c'est le produit (lien avec la convolution). Valeur du  $k$ -ième moment de  $X =$  la dérivée  $k$ -ième en 0. TCL.

### Annexe

tracer le sinc, les approximations de l'unité.

## 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

**Motivation** : les polynômes c'est bien, mais on aime bien compléter leur algèbre en celles des séries entières. Les ondes, c'est bien, mais on aime bien les superposer à l'infini (séries de fourier). Dans quelle mesure les propriétés d'analyse passent à la limite? (c'est la partie I)

série harmonique aléatoire? où mettre Stone-Weierstrass et ses applications? les séries dans  $L^2$  sont commutativement convergentes.

### 1. Passage à la limite

#### 1.1 Modes de convergence

##### (i) Suites

##### (ii) Séries

convergence commutative : oui si CVN, non en CVU

#### 1.2 Régularités

##### (i) Limites et continuité

théorème d'egoroff, une limite simple de fonctions continues est continue sur un  $G_\delta$  dense

##### (ii) Classe $C^k$

fonction de weierstrass

#### 1.3 Intégration

## 2. Séries entières et analyse complexe

#### 2.1 Séries entières et fonctions holomorphes

Bergman ici?

#### 2.2 Suites, séries et produits de fonctions holomorphes

#### 2.3 Application : le théorème des nombres premiers

#### 2.4 Fonctions génératrices

Galton-Watson

## 3. Topologie dans des espaces de fonctions

#### 3.1 Complétude

cauchy uniforme, banach-picard, cauchy-lipschitz, equa diff avec retard, riesz-fischer

#### 3.2 Compacité

équicontinuité (et uniforme), ascoli, riesz-fréchet-kolmogorov (ZUILY, se restreindre à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  voire  $\mathbb{R}^n$ ), montel, théorème des familles normales (brézis?)

## 4. Séries de Fourier

#### 4.1 Convergence en moyenne de cesaro

coefficients de fourier et noyaux (être rapide) et lien avec la convolution, Féjer (uniforme et  $L^p$ ),  $L^1_{2\pi} \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  est injective non surjective **POURQUOIREF MANQUANTE**, et Banach- $G_\delta$ -Fourier IV.0.5

#### 4.2 Point de vue hilbertien

la base hilbertienne de fourier, égalité de parseval, convergence  $L^2$ .

#### 4.3 Convergence uniforme

condition suffisante ( $f$  continue et coefficients de fourier sommables), formule sommatoire de poisson, fonction theta, prolongement de  $\zeta$ , Shannon.

#### 4.4 Convergence simple

théorème de Dirichlet, calcul de  $\zeta(2k)$ , phénomène de Gibbs

## Annexe

Dvpts en série entière (exp, ln,  $(1+x)^\alpha$ ). Le secteur d'Abel. Bosse glissante.  $x^n$  sur  $[0, 1]$ . Diagramme des implications. Exemple des dents diadiques.

## 243 - Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

comment on calcule la putain de série donnée par le rapport du jury ? idée possible : abéliser avec comme variable  $x \in ]-1, 1[$ , et on est ramenés à une série entière à coefs positifs donc c'est une CVMonotone.

parler d'holomorphie ?

une fonction  $C^\infty$  pas analytique ( $e^{-1/x}$ )

produit de Cauchy et composition. évaluation d'une série entière dans une algèbre de matrices (réelle ou complexe).

L'exponentielle de matrices est un difféo entre  $\mathcal{H}^+$  et truc.

calcul des  $\zeta(2k)$ .

### 1. Convergence d'une série entière

#### 1.1 Rayon de convergence

#### 1.2 Calcul du rayon de convergence

#### 1.3 Opérations sur les séries entières

inversion, produit de cauchy, composition

### 2. Propriétés de la somme et régularité

#### 2.1 Convergence normale et régularité sur le disque ouvert

#### 2.2 Cercle d'incertitude, théorèmes abéliens et taubériens

attention, le théorème abélien est useless si les coefs sont positifs (convergence monotone)

#### 2.3 Fonctions DSE

#### 2.4 Séries génératrices

nombres de Bell et Doblinski, nombres de Catalan et arbres binaires stricts. Probab. indec de la loi de poisson ?

### 3. Lien avec l'analyse complexe

#### 3.1 Fonctions analytiques

Principe du prolongement analytique (NB : convient aux fonctions DSE!), principe des zéros isolés

#### 3.2 Intégrale de Cauchy

On peut se mettre dans un convexe/étoilé. formule de Cauchy, donc les fonctions holomorphes sur  $U$  y sont analytiques et on connaît le rayon de CV, formules de cauchy pour les coefficients, théorème de Liouville, d'Alembert-Gauss. Principe du maximum **REVOIR**

#### 3.3 Un espace de fonctions

Bergman.

### Annexe

secteur d'abel, et une grosse liste de DSE usuels.

## 245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.

À l'oral, mentionner  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} e^{-1/u}$  qui est super régulière mais pas au point d'être DSE. Il serait bien de savoir prolonger  $\zeta$  sur  $\mathbb{C}$  et de connaître son équation fonctionnelle (Analyse pour l'agrégation, Queffelec, Zuily). Trucs très bien mais qui ne sont pas indispensables pour moi : principes du maximum, lemme de Schwarz et théorème de l'application ouverte.  $\exists$  primitive équivalente à être d'intégrale nulle sur tous les lacets. Peut-être peut-on parler du Théorème de Weierstrass (Rudin Analyse réelle et complexe) permettant de construire des fonctions holomorphes de zéros arbitraires, et de son application pour montrer que  $\mathcal{H}(\mathbb{U})$  est à pgcd. REFS : Amar, Tauvel, Rudin ARC c'est tout.

### 1. Analyticité, holomorphicité

#### 1.1 Fonctions analytiques et zéros isolés

et donc principe du prolongement analytique

#### 1.2 Fonctions holomorphes

définition, cauchy-riemann, analytique  $\Rightarrow$  holomorphe, dérivée nulle sur un connexe  $\Rightarrow$  fonction nulle (c'est du calcul diff).

#### 1.3 Exemples capitaux de fonctions holomorphes

exponentielle, sa surjectivité, cosinus/sinus, détermination principale du  $\log$  **REVOIR**.

### 2. Intégrale sur un chemin et théorème de Cauchy

#### 2.1 Intégrale sur un chemin

chemins, homotopie

#### 2.2 Théorème de Cauchy

l'intégrale ne dépend pas du chemin puis est nulle. D'où la formule de Cauchy  $\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi$ , expression des dérivées  $n$ -ièmes, rayon de convergence, inégalités de Cauchy, Liouville, d'Alembert-Gauss. Singularités effaçables : si  $f$  prolongeable continument en un point à l'intérieur d'un ouvert, où elle n'est pas définie, alors elle est prolongeable. Calcul de  $\zeta(2k)$ .

#### 2.3 Principe du maximum ?

### 3. Fonctions méromorphes

#### 3.1 Méromorphie

Coefficients de Laurent, singularité isolée, Casorati-Weierstrass (peut-on se passer des singularités essentielles?), permet une définition des fonctions méromorphes, et développement en série de Laurent.

#### 3.2 Théorème des résidus

indice d'un point dans un lacet, théorème des résidus, formule des compléments

#### 3.3 Suites, séries, produits de fonctions

$\Gamma$ ,  $\zeta$ ,  $\theta$  ?

### 4. Le théorème des nombres premiers

La giga classique en version giga complète avec un giga théorème taubérien de newman. Bonus : prolongement de  $\zeta$ . **REVOIR**

### Annexe

homotopie, dessin de  $df_a$  similitude directe, lacets et indices, taubérien de newman

Bonus en application : Inégalités remarquables : Inégalité de Wirtinger, et isopérimétrique ??

## 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

### 1. Coefficients de Fourier

#### 1.1 Définition

déf des  $c_n$ , (pour des fonctions  $L^1$ ) déf des  $a_n, b_n$  et lien entre les deux, expression de la série de fourier partielle dans ces deux bases. calcul de  $c_n(x^2)$ .

#### 1.2 Propriétés

règles de calcul des coefficients de fourier (translation, dérivation, conjugaison, convolution), l'algèbre de Banach  $L^1$  pour la convolution, lien avec les coefficients. Lemme de Riemann-Lebesgue (et raffinement pour les fonctions  $C^\infty$ , seulement un sens ici). Donc c'est une appli linéaire de  $L^1$  vers  $c_0(\mathbb{Z})$  (pk c'est pas surjectif?) (on saura plus tard pk c'est injectif?).

#### 1.3 Point de vue hilbertien

$L^2 \subset L^1$ . produit scalaire, on sait déjà qu'on a une famille orthonormée, les coefficients sont des projections orthogonales.

### 2. Etude de la convergence de la série de Fourier

#### 2.1 Noyaux et convergence au sens de Cesaro

dirichlet, féjer, minoration de celui de Dirichlet . Le féjer est positif et de masse totale 1. expression des sommes de fourier avec la convolution. Le noyau de féjer est une approximation de l'unité. Théorème de Féjer  $L^p$  avec vitesse de cv, et même chose pour  $L^\infty$ .

#### 2.2 Conditions pour que la série de Fourier converge

Si les  $c_n$  et  $c_{-n}$  sont décroissantes tendant vers 0, alors CVS sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  et CVU sur tout compact de ça (Somme d'Abel. C'est utile car dans ce cas ça CVU stc vers  $f$ ). On apprend donc Weierstrass Trigo. Si les  $c_n$  sont sommables alors CVN donc vers  $f$ . Si  $f$  continue et  $C_1pm$  alors CVN vers  $f$ . Exemple de  $x^2$ . Puis Dirichlet., Gibbs, la fonction qui oscille beaucoup trop (gourdon), et les  $G_\delta$  denses.

#### 2.3 Point de vue hilbertien

Féjer nous apprend que c'était une base hilbertienne. Donc égalité de Parseval.  $c_n(x^2)$  permet de connaître  $\zeta(2)$ ,  $\zeta(4)$ .

### 3. Applications

#### 3.1 Régularité

caractérisation de la classe  $C^\infty$ , condition suffisante pour être DSE.

#### 3.2 L'équation de la chaleur

**REVOIR!** (Queffelec-Zuily). Préférer la version sur un tore : plus simple. Sur un barreau, voir le Bernis.

#### 3.3 Echantillonnage

formule sommatoire de poisson, échantillonnage de Shannon, bonus : c'est une isométrie entre espaces de Hilbert donc le jury est content **REVOIR**

#### 3.4 Calculs autour de fonctions holomorphes usuelles

calcul des  $\zeta(2k)$ . équation sur  $\theta$ . (et donc sur  $\zeta$ ?)

### Annexe

Gibbs. Schéma de la chaleur ? Le principe physique à l'échelle infinitésimale... Visualisation de Riemann-Lebesgue (les oscillations se compensent quand on somme)

## 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

**Motivation :** Jensen veut comprendre l'IAG

### 1. Fonctions et ensembles convexes

#### 1.1 Ensembles convexes

définition, description des convexes de  $\mathbb{R}$ , une boule est convexe, un ev est convexe

#### 1.2 Fonctions convexes

**rombaldi** caractérisation des fxs convexes par la croissance de la dérivée donc par  $f''$ .

qgalton (dev)

limite simple de fonctions convexes

un exemple :  $\lambda_1$  est concave,  $\lambda_n$  est convexe

stabilité par composition, logcvx, logconcavité. bohr mollerup (dev)

en dimension supérieure avec la hessienne

régularité desq fonctions convexes, lipschitzianité

caractérisation : un inf de formes linéaires est concave :  $\det(H)^{1/n}$  est concave

### 2. Inégalités de convexité

#### 2.1 Inégalités de familles de réels

$e^x \geq x + 1$  application : **borel-cantelli!!!**  $\ln(1+x) < x$  application : **DA du log itéré!!!** IAG, Holder (pour des sommes), Young. logdet est strictement concave sur  $\mathcal{S}_n^{++}$ .

#### 2.2 Inégalités et théorie de l'intégration

inég de jensen, construction des espaces  $L^p$ , riesz-fischer. Lien entre espaces  $L^p$  pour des espaces de proba.

### 3. Parties convexes et optimisation

#### 3.1 Convexité dans un espace de Hilbert

critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert

projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert. Représentation de Riesz, une b.o.n pour bergman le gradient **moindres carrés?**

#### 3.2 Géométrie des compacts convexes

hyperplans d'appui

carathéodory

enveloppe convexe de  $on(\mathbb{R})$  (pas dev)

hahn-banach (séparation d'un convexe compact et d'un fermé?)

krein millman, polytopes et faces

une isométrie d'un polygone permute les sommets, c'est  $D_n$ .

#### 3.3 Problèmes d'optimisation

minimum local de fx convexe  $\Rightarrow$  minimum global et résolution d'un système linéaire par une minimisation (BMP)

Application : ellipsoïde de john (pas dev)