ENS de Lyon — Géométrie Algébrique
M1 — 2025-2026

TD8 : Théorie de l'élimination

Soit k un corps et K un corps algébriquement clos qui le contient. Un anneau gradué R est un anneau commutatif muni d'une écriture de la forme $R = \bigoplus_{d \geqslant 0} R_d$ où les R_d sont des sous-groupes pour l'addition et tel que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, R_m R_n \subset R_{m+n}.$$

Expliquer pourquoi $k[X_1, \ldots, X_n]$ a naturellement une telle structure.

**Exercise 1.** (*Une forme équivalente du Nullstellensatz projectif*) —
On rappelle le Nullstellensatz projectif vu en classe : Soit I un idéal homogène de $k[T_0, \ldots, T_n]$. Alors $V_p(I) \subset \mathbb{P}^n_K$ est vide si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que chaque T_i^N est dans I. Montrez que ce résultat est équivalent à :

Soit $R = \bigoplus_{d \geqslant 0} R_d$ un anneau gradué engendré comme anneau par $R_1 \cup R_0$, tel que $R_0 = k$, et tel que chaque R_d est de dimension finie sur k, alors on a la dichotomie suivante : Il existe un d_0 tel que $R_d = 0$ pour tour $d \geqslant d_0$ **OU** pour tout entier d on a $R_d \neq 0$ et il existe un morphisme de k-algèbres $R \to K$ non identiquement nul sur $R^+ = \bigoplus_{d \geqslant 1} R_d$.

**Exercise 2.** (*Théorie de l'élimination*) — Soit A une k-algèbre de type fini. On se donne $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes homogènes de $A[T_0, \ldots, T_n]$, et on note $I = (P_1, \ldots, P_m)$ l'idéal (homogène) qu'ils engendrent.

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un idéal radical $\mathfrak{a}$ de A tel que pour tout morphisme $A \to K$ de k-algèbres, la famille de polynômes $\varphi(P_1), \ldots, \varphi(P_m)$ a une racine commune non triviale dans K si et seulement si $\varphi(\mathfrak{a}) = \{0\}$. C'est le théorème principal de la théorie de l'élimination.

La preuve qui suit est une super preuve de Cartier et Tate ([CT78]).

On va montrer que $\mathfrak{a}$ peut être choisi comme étant le radical de l'idéal des $f \in A$ tels qu'il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant fT_i^N est dans I pour tous les i.

1. On considère $B = A[T_0, \ldots, T_n]$ comme un anneau gradué, avec $B_0 = A$, et B_d le A-module des polynômes homogènes de degrés d.

a. Montrez que $R = B/I$ est naturellement un anneau gradué.

b. Montrez que R est engendré comme $\mathbb{Z}$-algèbre par $R_0 \cup R_1$. Montrez que pour chaque $d \in \mathbb{N}$, le R_0-module R_d est finiment engendré.

On note $\mathfrak{S}$ l'idéal de R_0 dont les éléments f vérifient $fR_d = \{0\}$ pour tout d assez grand.

c. Montrez que le théorème que l'on veut montrer est équivalent au théorème suivant : Soit $R = \bigoplus_{d \geqslant 0} R_d$ un anneau gradué qui vérifie les conclusions du point **b.** et R_0 est une k-algèbre de type fini. Soit K un corps algébriquement clos et soit

$\varphi : R_0 \to K$ un morphisme d'anneaux. Alors φ s'étend en un morphisme d'anneau $\Psi : R \to K$ qui n'est pas identiquement nul sur l'ideal $R^+ = \bigoplus_{d \geqslant 1} R_d$ si et seulement si φ est nul sur $\mathfrak{S}$.

2. On va donc montrer ce second résultat. Soit $\mathfrak{K}$ le noyau de φ. On suppose que $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$. On va appliquer des transformations à notre anneau R de sorte à le simplifier, à chaque étape il faut donc vérifier que les hypothèses conclusions de **b.**, ainsi que $R_d \neq 0$ pour tout d, sont toujours satisfaites.

a. Soit

$$J = \{f \in R \mid \exists s \in R_0 \setminus \mathfrak{K}, sf = 0\}$$

Montrez que J est un ideal homogène de R. On pose $R' = R/J$ et $\mathfrak{K}' = (\mathfrak{K} + J)/J$. Soit $\Sigma = R'_0 \setminus \mathfrak{K}'$. Montrer que tout élément de Σ est régulier (c'est à dire n'est pas un diviseur de zéro) dans R'.

b. On pose $R'' = R'[\Sigma^{-1}]$ et $\mathfrak{K}'' = R''\mathfrak{K}'$. Montrer que R''_0 est un anneau local gradué.

c. On pose $R''' = R''/\mathfrak{K}''$. Montrez que c'est une k-algébre graduée, telle que R'''_0 est un corps.

d. Maintenant on a une suite de morphismes de k-algèbres graduées

$$R \to R' \to R'' \to R'''.$$

Montrez que R''' vérifie les hypothèses du théorème de l'exercice 1, conclure (et montrez le sens facile).

$k = K$ est désormais algébriquement clos.

3. Montrer que le théorème a l'interprétation géométrique suivante : On considère la topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{A}^N_k$: les fermés sont définis par les zéros de familles de polynomes dans $k[T_0, \ldots, T_n, X_1, \ldots, X_N]$ homogènes en T. Alors la projection

$$\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{A}^N_k \to \mathbb{A}^N_k$$

est fermée : l'image d'un fermé est un fermé, et en donner l'idéal. Cela montre que l'espace projectif est une variété algébrique *propre*.

4. Montrez que l'idéal radical $\mathfrak{a}$ est unique, et ne dépend que de I.

5. Dans le cas où $A = k[X_1, \ldots, X_d]$, on peut montrer que $\mathfrak{a}$ est principal. Un générateur de $\mathfrak{a}$ est appelé *résultant* de I. Montrez que si $m < n + 1$ le résultant est nul.

6. Si $A = k[a, b, c, \ldots, h, i]$ est l'anneau de polynomes en 9 variables, et si I est l'idéal de $A[x, y, z]$ donné par

$$(ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz),$$

à quoi correspond l'image de la projection $\mathbb{P}^2_k \times \mathfrak{M}_3(k) \to \mathfrak{M}_3(k)$?

7. Montrez qu'il existe un polynome $P \in k[X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, X_n]$ tel que pour tous $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n$, $P(a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, a_n) = 0$ si et seulement si les polynomes $a_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \cdots + a_n y^n$ et $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \ldots b_n y^m$ ont une racine non nulle commune : c'est le résultant.

[CT78] P. Cartier and J. Tate. A simple proof of the main theorem of elimination theory in algebraic geometry. Enseign. Math. (2), 24(3-4) :311–317, 1978. 3