

TD8 : THÉORIE DE L'ÉLIMINATION

Un anneau gradué  $R$  est un anneau commutatif muni d'une écriture de la forme  $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$  où les  $R_d$  sont des sous-groupes pour l'addition et tel que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, R_m R_n \subset R_{m+n}.$$

Expliquer pourquoi  $k[X_1, \dots, X_n]$  a naturellement une telle structure.

**Exercice 1.** (*Une forme équivalente du Nullstellensatz projectif*) —

On rappelle le Nullstellensatz projectif vu en classe : Soit  $I$  un idéal homogène de  $k[T_0, \dots, T_n]$ . Alors  $V_p(I) \subset \mathbb{P}_K^n$  est vide si et seulement si il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que chaque  $T_i^N$  est dans  $I$ . Montrez que ce résultat est équivalent à :

Soit  $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$  un anneau gradué engendré comme anneau par  $R_1 \cup R_0$ , tel que  $R_0 = k$ , et tel que chaque  $R_d$  est de dimension finie sur  $k$ , alors on a la dichotomie suivante :

Il existe un  $d_0$  tel que  $R_d = 0$  pour tout  $d \geq d_0$  **OU**  
pour tout entier  $d$  on a  $R_d \neq 0$  et il existe un morphisme de  $k$ -algèbres  $R \rightarrow K$  non  
identiquement nul sur  $R^+ = \bigoplus_{d \geq 1} R_d$ .

*Correction.* Montrons l'implication. Soit  $R$  un tel anneau gradué. Dans un anneau gradué en général,  $R_0$  est un sous-anneau puisque c'est un sous-groupe,  $R_0 R_0 \subset R_{0+0}$ , et  $1 \in R_0$  car on peut écrire  $1 = x_0 + \dots + x_n$ ,  $x_i \in R_i$ , et  $\forall k, x_k = 1 \cdot x_k = x_k x_0 + \dots + x_k x_n$  donc par identification  $x_k = x_k x_0$ , mais aussi  $\forall k, \forall l > 0, x_k x_l = 0$ . Donc, pour tout  $l \geq 1, x_l = x_l x_0 = 0$ , donc  $1 = x_0$ .

Take a basis  $(y_1, \dots, y_n)$  of the  $k$ -space  $R_1$  then define  $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R$  by sending  $X_i$  to  $y_i$ . Denote by  $k[X_1, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} H_d$  the natural grading, one sees that  $H_d \rightarrow R_d$  is surjective because every element of  $R_d$  can be written as a  $k$ -linear combination of products of elements in  $R_1$ , but those product should have exactly  $d$  factors.

Hence  $H_d \rightarrow R_d$  is a surjective morphism of groups, denote  $J_d$  its kernel. Denote  $J$  the graded ideal of  $k[X_1, \dots, X_n]$ ,  $J = \bigoplus_{d \geq 0} J_d$ . It is easy to see that  $J$  is the kernel of  $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R$ . Hence either  $V(J)$  is not empty, either  $\sqrt{J}$  contains all the  $X_i$ . In this last case, there is some  $N$  such that all the  $T_i^N$  are in  $J$  so there is some  $N'$  big enough such that every monomial of total degree  $\geq N'$  contains a factor  $T_i^N$  so  $\forall d \geq N', J_d = H_d$ .

In the case where  $V(J)$  is not empty, then there is some  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in V(J)$  but then one has a morphism  $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K$  sending  $X_i$  to  $\xi_i$ , which is zero on  $J$  so it's a morphism  $R \rightarrow K$ , but the  $\xi_i$  are not all zero (because  $V(J)$  is in the projective space) so there is a  $X_i$  of which no power is sent to 0, hence  $R^+$  is not contained in the kernel.

The other way round is the same : every graded  $J$  gives rise to  $R = \bigoplus_{d \geq 0} S_d / J \cap S_d$ , and the condition is met.

**Exercice 2.** (*Théorie de l'élimination*) — Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de type fini. On se donne  $P_1, \dots, P_m$  des polynômes homogènes de  $A[T_0, \dots, T_n]$ , et on note  $I = (P_1, \dots, P_m)$  l'idéal (homogène) qu'ils engendrent.

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un idéal radical  $\mathfrak{a}$  de  $A$  tel que pour tout morphisme  $A \rightarrow K$  de  $k$ -algèbres, la famille de polynômes  $\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_m)$  a une racine commune non triviale dans  $K$  si et seulement si  $\varphi(\mathfrak{a}) = \{0\}$ . C'est le théorème principal de la théorie de l'élimination.

La preuve qui suit est une super preuve de Cartier et Tate ([CT78]).

On va montrer que  $\mathfrak{a}$  peut être choisi comme étant radical de l'idéal des  $f \in A$  tels qu'il existe un  $N \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $fT_i^N$  est dans  $I$  pour tous les  $i$ .

1. On considère  $B = A[T_0, \dots, T_n]$  comme un anneau gradué, avec  $B_0 = A$ , et  $B_d$  le  $A$ -module des polynômes homogènes de degrés  $d$ .

a. Montrez que  $R = B/I$  est naturellement un anneau gradué.

b. Montrez que  $R$  est engendré comme  $\mathbb{Z}$ -algèbre par  $R_0 \cup R_1$ . Montrez que pour chaque  $d \in \mathbb{N}$ , le  $R_0$ -module  $R_d$  est finiment engendré.

On note  $\mathfrak{S}$  l'idéal de  $R_0$  dont les éléments  $f$  vérifient  $fR_d = \{0\}$  pour tout  $d$  assez grand.

c. Montrez que le théorème que l'on veut montrer est équivalent au théorème suivant : Soit  $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$  un anneau gradué qui vérifie les conclusions du point b. et  $R_0$  est une  $k$ -algèbre de type fini. Soit  $K$  un corps algébriquement clos et soit  $\varphi : R_0 \rightarrow K$  un morphisme d'anneaux. Alors  $\varphi$  s'étend en un morphisme d'anneau  $\Psi : R \rightarrow K$  qui n'est pas identiquement nul sur l'idéal  $R^+ = \bigoplus_{d \geq 1} R_d$  si et seulement si  $\varphi$  est nul sur  $\mathfrak{S}$ .

2. On va donc montrer ce second résultat. Soit  $\mathfrak{K}$  le noyau de  $\varphi$ . On suppose que  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$ . On va appliquer des transformations à notre anneau  $R$  de sorte à le simplifier, à chaque étape il faut donc vérifier que les hypothèses conclusions de b., ainsi que  $R_d \neq 0$  pour tout  $d$ , sont toujours satisfaites.

a. Soit

$$J = \{f \in R \mid \exists s \in R_0 \setminus \mathfrak{K}, sf = 0\}$$

Montrez que  $J$  est un idéal homogène de  $R$ . On pose  $R' = R/J$  et  $\mathfrak{K}' = (\mathfrak{K} + J)/J$ . Soit  $\Sigma = R'_0 \setminus \mathfrak{K}'$ . Montrez que tout élément de  $\Sigma$  est régulier (c'est à dire n'est pas un diviseur de zéro) dans  $R'$ .

b. On pose  $R'' = R'[\Sigma^{-1}]$  et  $\mathfrak{K}'' = R''\mathfrak{K}'$ . Montrez que  $R''_0$  est un anneau local gradué.

c. On pose  $R''' = R''/\mathfrak{K}''$ . Montrez que c'est une  $k$ -algèbre graduée, telle que  $R'''_0$  est un corps.

d. Maintenant on a une suite de morphismes de  $k$ -algèbres graduées

$$R \rightarrow R' \rightarrow R'' \rightarrow R'''.$$

Montrez que  $R'''$  vérifie les hypothèses du théorème de l'exercice 1, conclure (et montrez le sens facile).

$k = K$  est désormais algébriquement clos.

3. Montrez que le théorème a l'interprétation géométrique suivante : On considère la topologie de Zariski sur  $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{A}_k^N$  : les fermés sont définis par les zéros de familles

de polynômes dans  $k[T_0, \dots, T_n, X_1, \dots, X_N]$  homogènes en  $T$ . Alors la projection

$$\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{A}_k^N \rightarrow \mathbb{A}_k^N$$

est fermée : l'image d'un fermé est un fermé, et en donner l'idéal. Cela montre que l'espace projectif est une variété algébrique *propre*.

4. Montrez que l'idéal radical  $\mathfrak{a}$  est unique, et ne dépend que de  $I$ .

5. Dans le cas où  $A = k[X_1, \dots, X_N]$ , on peut montrer que  $\mathfrak{a}$  est principal. Un générateur de  $\mathfrak{a}$  est appelé *résultant* de  $I$ . Montrez que si  $m < n + 1$  le résultant est nul.

6. Si  $A = k[a, b, c, \dots, h, i]$  est l'anneau de polynomes en 9 variables, et si  $I$  est l'idéal de  $A[x, y, z]$  donné par

$$(ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz),$$

à quoi correspond l'image de la projection  $\mathbb{P}_k^2 \times \mathfrak{M}_3(k) \rightarrow \mathfrak{M}_3(k)$  ?

7. Montrez qu'il existe un polynome  $P \in k[X_0, \dots, X_m, Y_0, \dots, Y_n]$  tel que pour tous  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$ ,  $P(a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n) = 0$  si et seulement si les polynomes  $a_0x^m + b_1x^{m-1}y + \dots + a_ny^n$  et  $b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \dots + b_ny^m$  ont une racine non nulle commune : c'est le résultant.

*Correction.* Suppose that the new theorem is true. Then let  $P_1, \dots, P_m$  be homogeneous polynomials in  $A[T_0, \dots, T_n]$  and  $\mathfrak{a}$  be as given and  $I$  the homogeneous ideal they generate.

2.a. Show that  $J = \bigoplus_{d \geq 0} (J \cap R_d)$  (take any element in  $J$ , write it as a sum of homogeneous ones, and show that they are in  $J$ , and the other way is easy knowing that  $R_0 - \mathfrak{K}$  is stable by multiplication). Let  $f \in R_0 - (\mathfrak{K} + J)$  and  $g \in R'$  non zero (meaning that  $g \notin J$ ) such that  $fg$  is zero in  $R'$ . This means that  $fg \in J$ . Then there is some  $s \in R_0 - \mathfrak{K}$  such that  $sf g = 0$ . But  $sf \in R_0 - \mathfrak{K}$  hence  $g \in J$ . Hence  $\bar{f}$  is regular.

We have  $R'_d \neq 0$  because  $R_d \cap J \neq R_d$ . Suppose that  $R_d \cap J = R_d$ . Then take a finite generating family of  $R_d$  over  $R_0$ ,  $(f_i)$ . The  $f_i$  are then annihilated by some  $s_i \in R_0 - \mathfrak{K}$  hence all  $R_d$  is annihilated by  $\prod_i s_i$ . But (using the property b and previous-like argument) then  $\prod_i s_i \in \mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$ , impossible.

2.b. the graduation is easy to get, the fact that  $R'_d \neq 0$  is easy to get and the property b is easy to get. We want to show that  $\mathfrak{K}' \cap R'_0$  is prime in  $R'_0$ . It suffices to show that  $R_0 \cap (\mathfrak{K} + J)$  is prime in  $R_0$ . Let  $f, g \in R_0$  such that  $fg \in \mathfrak{K} + J$ . Then we have some  $s \in R_0 - \mathfrak{K}$  such that  $sf g \in \mathfrak{K}$ . But  $\mathfrak{K}$  is prime, so say  $f \in \mathfrak{K}$ , then  $f \in R_0 \cap (\mathfrak{K} + J)$ . So this is just the localization at a prime ideal, and the prime ideal is just this one (see course in semester 1) (THIS IS NOT ENOUGH FOR  $R''$  TO BE LOCAL, this only covers  $R''_0$ )

2.c. graduation is obvious (again a quotient by a graded ideal). The fact that  $R''_d \neq 0$  is Nakayama's lemma giving  $\mathfrak{K}'' R''_d \neq R''_d$ .

3. Let  $F$  be a closed set of  $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{A}_k^N$ , meaning that  $F$  is the set of zeros of polynomials  $P_1, \dots, P_m \in A[T_0, \dots, T_n]$  that are homogeneous in the  $T_0, \dots, T_n$ , and where  $A = k[X_1, \dots, X_N]$ . The image of  $F$  by this projection is exactly  $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}_k^N$ , where  $\mathfrak{a}$  is the ideal defined in function of the  $P_1, \dots, P_m$ , a the beginning of this exercise.

5. Recall :  $N$  is the number of "X" variables,  $n$  is the number of "T" variables,  $m$  is the number of equations  $P_1, \dots, P_m$ . Showing that  $\mathbf{a} = 0$  is the same as showing that the projection of  $V(P_1, \dots, P_m) \times \mathbb{A}_k^N$  onto  $\mathbb{A}_k^N$  is equal to  $\mathbb{A}_k^N$  (see question 3).

It boils down to show the fact that :  $\forall x \in \mathbb{A}_k^N$ , there exists some  $t = (t_0 : \dots : t_n) \in \mathbb{P}_k^N$  such that  $\forall 1 \leq i \leq m, P_i(T = t, X = x) = 0$ . Let  $x \in \mathbb{A}_k^N$ , put  $Q_i = P_i(X = x)$ . Then the  $Q_1, \dots, Q_m$  are homogeneous polynomials in  $T_0, \dots, T_n$ , it should not be hard to check that they are non constant.

The question boils down to show that, if  $Q_1, \dots, Q_m$  are non-constant homogeneous polynomials in  $T_0, \dots, T_n$ , then  $V(Q_1, \dots, Q_m)$  is non-empty. As  $k$  is algebraically closed, it boils down to showing that the ideal  $\sqrt{(Q_1, \dots, Q_m)}$  does not contain  $(T_0, \dots, T_n)$  (the irrelevant ideal). Suppose that it contains it, let's derive a contradiction.

The overkill proof is just dimension theory :  $(T_0, \dots, T_n)$  is generated by  $n$  variables so it should be impossible to embed in something generated by  $m$  variables, because, by assumption,  $m < n + 1$ .

For an accessible proof, use a later exercise sheet, using Hilbert series associated to graded algebras.

[CT78] P. Cartier and J. Tate. A simple proof of the main theorem of elimination theory in algebraic geometry. Enseign. Math. (2), 24(3-4) :311–317, 1978. 3